Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2014/2015
Blatt 12
23.01.2015

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag, 30.01.2015, **vor der Übung**

Für dieses Übungsblatt gibt es 13 Theorie- und 11 Matlab-Punkte, sowie 10 Theorie- und 4 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.
Die 50-Prozent-Grenzen liegen aktuell (inklusive Blatt 12) bei 95 Theoriepunkten und 104,5 Matlabpunkten.

Raumänderung (Vorankündigung):
Am **06. Februar 2015** finden wegen der Promotionsfeier der Fakultät für Ingenieurwissenschaften und Informatik die Übungen zu Angewandte Numerik 2 im Raum 47.1.507 statt.

Aufgabe 42 *(Finite-Differenzen-Methode)* (4T+4T+2T+4T* Punkte)

Wir betrachten das Randwertproblem mit homogenen Randbedingungen

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1) \qquad \text{mit} \qquad u(0) = u(1) = 0. \tag{1}$$

Zur Lösung mit der Finite-Differenzen-Methode führen wir auf $[0,1]$ ein äquidistantes Gitter

$$\Delta_h := \left\{ x_j \;\middle|\; x_j = jh;\ j = 0, \dots, m;\ h = \frac{1}{m} \right\}$$

ein und approximieren u durch $\{u_j\}_{j=0}^m$ mit $u_j \approx u(x_j)$ für $j = 0, \dots, m$.
Ersetzen wir nun die zweite Ableitung u'' an den Gitterpunkten x_j durch den zentralen Differenzenquotienten

$$u''(x_j) \approx \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2}, \qquad j = 0, \dots, m,$$

so erhalten wir ein lineares Gleichungssystem der Form

$$A^{(m)} u^{(m)} = f^{(m)} \qquad \text{mit} \qquad u^{(m)} = (u_1, \dots, u_{m-1})^T. \tag{2}$$

a) Geben Sie die Matrix $A^{(m)}$ und den Vektor $f^{(m)}$ explizit an.

b) Betrachten wir nun das Randwertproblem mit allgemeinen Randbedingungen $u(0) = \alpha_0$ und $u(1) = \alpha_1$. Wie muss dann die rechte Seite f des linearen Gleichungssystems (2) angepasst werden?

c) Erweitern Sie den Lösungsvektor $u^{(m)}$ um die Lösung u_0 und u_m auf dem Rand. Wie lauten dann die Matrix $\tilde{A}^{(m)}$ und der Vektor $\tilde{f}^{(m)}$ des erweiterten linearen Gleichungssystems

$$\tilde{A}^{(m)} \tilde{u}^{(m)} = \tilde{f}^{(m)} \qquad \text{mit} \qquad \tilde{u}^{(m)} = (u_0, \dots, u_m)^T?$$

d) Nun soll für eine Funktion $s : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto s(x)$ das Randwertproblem

$$-u''(x) + s(x)u(x) = f(x) \qquad \text{mit} \qquad u(0) = \alpha_0,\ u(1) = \alpha_1 \tag{3}$$

betrachtet werden. Geben Sie auch für dieses Randwertproblem die Matrix $\hat{A}^{(m)}$ und den Vektor $\hat{f}^{(m)}$ des resultierenden linearen Gleichungssystems $\hat{A}^{(m)} \hat{u}^{(m)} = \hat{f}^{(m)}$ mit $\hat{u}^{(m)} = (u_1, \dots, u_{m-1})^T$ an.

Aufgabe 43 *(Diskretes Skalarprodukt)* (6T* Punkte)

Zeigen Sie, dass durch

$$(w_h, v_h)_h := h \sum_{k=0}^{m} c_k w_k v_k \qquad \text{für } v_h, w_h \in V_h$$

mit $c_0 := c_m := \frac{1}{2}$, $c_k := 1$ $(k = 1, \ldots, m-1)$ ein Skalarprodukt auf V_h definiert wird.

Aufgabe 44 *(Zentraler Differenzenquotient von Polynomen zweiten Grades)* (3T Punkte)

Betrachten Sie ein beliebiges Polynom p zweiten Grades, also

$$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad \text{mit } a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}.$$

Sei $h > 0$ und $\Delta_h := \{x_j \mid x_j = jh;\ j = 0, \ldots, m;\ h = \frac{1}{m}\}$ ein Gitter.
Berechnen Sie den zentralen Differenzenquotienten

$$\frac{p(x_{j-1}) - 2p(x_j) + p(x_{j+1})}{h^2} = -(L_h p)(x_j), \qquad j = 1, \ldots, m-1.$$

Aufgabe 45 *(Programmieraufgabe: Finite-Differenzen-Methode)* (3M+3M+3M+2M+4M* Punkte)

a) Schreiben Sie eine Matlabfunktion `uj = fdm(f, xj)`, die eine Lösung des Randwertproblems (1) mit der Finite-Differenzen-Methode näherungsweise berechnet. `f` ist dabei eine Funktion für die rechte Seite des Randwertproblems, `xj` ein äquidistantes Gitter und `uj` die berechnete diskrete Näherungslösung. Das auftretende lineare Gleichungssystem dürfen Sie mit dem Matlaboperator \ lösen.

b) Schreiben Sie ein Matlabskript `testFdm`, das Ihre Matlabfunktion `uj = fdm(f, xj)` mit der Funktion $f(x) = 1$ und den Schrittweiten $h = 2^{-1}, \ldots, 2^{-5}$ testet. Plotten Sie für jede Schrittweite die Näherungslösung und die exakte Lösung $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{2}$ in ein Schaubild.

c) Erweitern Sie Ihr Matlabskript `testFdm` und berechnen Sie auch den lokalen Abbruchfehler $\tau_h(x_j)$. Welchen Wert hat der lokale Abbruchfehler im Beispiel aus Aufgabenteil b)? Erklären Sie Ihre Beobachtung. Berücksichtigen Sie dabei auch das Ergebnis der Aufgabe 44 und die Konsistenzordnung der Finite-Differenzen-Methode.

d) Testen Sie nun Ihre Matlabfunktion `uj = fdm(f, xj)` auch mit der Funktion $f(x) = x - \frac{1}{3}$ und den Schrittweiten aus Aufgabenteil b). Die exakte Lösung ist jetzt $u(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + x^2)$. Wie groß ist der lokale Abbruchfehler jetzt? Warum?

e) Erweitern Sie nun Ihre Matlabfunktion `fdm` zu `uj = fdmAllgemein(f, alpha0, alpha1, xj, s)` und Ihr Matlabskript `testFdm`, so dass Sie auch Lösungen des allgemeineren Randwertproblems (3) aus Aufgabe 42 d) berechnen können. Testen Sie Ihre Funktion (exakte Lösung jeweils $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 1$) mit

   i) $u(0) = 1, \quad u(1) = \frac{3}{2}, \quad s(x) = 0, \quad f(x) = 1$ und
   ii) $u(0) = 1, \quad u(1) = \frac{3}{2}, \quad s(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = -\frac{x}{2} + 2 + \frac{1}{x}$.

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt12** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.