Prof. Dr. Karsten Urban
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

WiSe 2014/2015
Blatt 14
06.02.2015

Angewandte Numerik 2

Abgabetermin: Freitag, 13.02.2015, **vor der Übung**

Für dieses Übungsblatt gibt es 8 Theorie- und 18 Matlab-Punkte, sowie 6 Theorie- und 14 Matlab-Zusatzpunkte. Punkte, die mit einem * gekennzeichnet sind, sind Zusatzpunkte.

Zum Bestehen der **Vorleistung** sind insgesamt 108,5 Theorie- und 120 Matlabpunkte nötig. Benötigen Sie zum Bestehen der Vorleistung noch Punkte aus diesem Übungsblatt, so vermerken Sie dies bitte **deutlich** auf der ersten Seite Ihrer Abgabe, damit eine schnelle Korrektur des Übungsblattes erfolgen kann.

Bitte melden Sie sich bis **spätestens Freitag, 13.02.2015** zur Vorleistung an. Die Anmeldung ist bereits jetzt möglich.

Aufgabe 49 *(Programmieraufgabe: Galerkin-Verfahren mit Hutfunktionen)*

(2T+6T+8M+6M+4M Punkte)

Für das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x), \qquad x \in (0,1) \qquad \text{mit } u(0) = u(1) = 0 \tag{1}$$

soll numerisch eine Näherungslösung berechnet werden.
Zur Diskretisierung führen wir auf $[0,1]$ ein äquidistantes Gitter

$$\Delta_h := \left\{ x_i \;\middle|\; x_i = ih;\ i = 0, \dots, m;\ h = \frac{1}{m} \right\}$$

ein. Als Basis $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ $(N = N_h = m - 1)$ für den diskreten Raum V_h sollen die auf diesem Gitter Δ_h definierten Hut-Funktionen

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x_i < x \le x_{i+1} \\ 0, & \textit{sonst} \end{cases}$$

$(i = 1, \dots, N)$ verwendet werden.

a) Wie lautet die Steifigkeitsmatrix A_N des linearen Gleichungssystems $A_N u_N = f_N$?

b) Berechnen Sie zunächst auf dem Papier die Komponenten der rechten Seite f_N des linearen Gleichungssystems mittels Quadratur. Verwenden Sie hierzu

   i) die Mittelpunktregel und

   ii) die Trapezregel.

Hinweis:
Wenden Sie bei der Berechnung der i-ten Komponente f_i die jeweilige Quadraturformel auf das Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ und das Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ getrennt an. Die Komponenten f_i hängen von f ab.

c) Schreiben Sie ein Matlab-Programm zur Berechnung einer Näherungslösung des obigen Randwertproblems (1) mit dem Galerkin-Verfahren. Berechnen Sie dabei die rechte Seite f_N mit der Mittelpunktregel aus Aufgabenteil Teil b), mit der Trapezregel aus Aufgabenteil b) und mit der Matlab-Funktion `quad`.

d) Testen Sie Ihr Programm für verschiedene f:

i) $f(x) = 1$, exakte Lösung: $u(x) = -\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x$,

ii) $f(x) = \sin(\pi x)$, exakte Lösung: $u(x) = \frac{1}{\pi^2}\,\sin(\pi x)$,

iii) $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$, exakte Lösung: $u(x) = \begin{cases} -x^2 + \frac{7}{8}x, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}, & \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases}$

Zeichnen Sie dabei jeweils in ein Schaubild die drei Näherungslösungen für die verschiedenen Berechnungen der rechten Seite sowie die exakte Lösung. Verwenden Sie jeweils mehrere unterschiedliche Dimensionen N des diskreten Raumes V_h.

e) Plotten Sie jeweils den Fehler und interpretieren Sie Ihre Schaubilder.

Aufgabe 50 *(Programmieraufgabe: Galerkin-Verfahren mit Trigonometrischen Funktionen)*
(6T*+6M*+4M*+4M* Punkte)

Wir betrachten wieder das Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x), \qquad x \in (0,1) \qquad \text{mit } u(0) = u(1) = 0.$$

Allerdings verwenden wir als Basis für den diskreten Raum V_h jetzt die Funktionen $\varphi_k(x) = \sin(k\pi x)$, $x \in [0,1]$, $k = 1, \ldots, N$.

a) Berechnen Sie die Einträge der Steifigkeitsmatrix zunächst auf dem Papier.
Hinweis: Es gilt

i) $\cos(x) \cdot \cos(y) = \frac{1}{2}\,(\cos(x-y) + \cos(x+y))$ und

ii) $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$.

b) Schreiben Sie ein Matlab-Programm zur Berechnung einer Näherungslösung des obigen Randwertproblems mit dem Galerkin-Verfahren. Verwenden Sie dabei als Basisfunktionen die Funktionen $\varphi_k(x) = \sin(k\pi x)$, $x \in [0,1]$, $k = 1, \ldots, N$.

c) Testen Sie Ihr Programm wieder für die verschiedenen f aus Aufgabe 49 und zeichnen Sie die Näherungslösung und die exakte Lösung jeweils für verschiedene N. Sie dürfen zur Berechnung der rechten Seite f_N die Matlab-Funktion `quad` verwenden.

d) Plotten Sie jeweils den Fehler und interpretieren Sie Ihre Schaubilder.

Hinweise:
Die Programmieraufgaben sind in Matlab zu erstellen. Senden Sie alle Files in einer E-mail mit dem Betreff **Loesung-Blatt14** an **angewandte.numerik@uni-ulm.de** (Abgabetermin jeweils wie beim Theorieteil). Drucken Sie zusätzlich allen Programmcode sowie die Ergebnisse aus und geben Sie diese vor der Übung ab. Der Source Code sollte strukturiert und, wenn nötig, dokumentiert sein.