Prof. Dr. Dirk Lebiedz
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2014/2015

Numerische Optimierung - Übungsblatt 2

(Besprechung: Mittwoch, 29. Oktober 2014)

Aufgabe 5 *(Optimierungsprobleme)*

a) Zwei Produkte P_1 und P_2 durchlaufen in einem Betrieb bei der Produktion zwei Maschinen M_1 und M_2. Die Bearbeitungszeit pro Einheit seien in der folgenden Tabelle (in Stunden) gegeben

	M_1	M_2
P_1	1	1
P_2	2	1

Die monatlich verfügbare Arbeitszeit beträgt 170h für M_1 und 150h für M_2. Der Gewinn von P_1 beträgt 250 Euro/Einheit und der Gewinn von P_2 beträgt 400 Euro/Einheit. Die Fixkosten für den Betrieb aller Maschinen belaufen sich auf 30000 Euro pro Monat. Formulieren Sie ein geeignetes Optimierungsproblem, welches den Gewinn maximiert.

b) Ein Kleinunternehmen hat ein neues Produkt entwickelt und damit eine sehr lukrative Marktlücke besetzt. Je Stück fallen momentan 500€ Herstellungskosten an. Durch Großeinkäufe von Rohstoffen bei Ausweitung der Produktionsmenge könnte man die Stückkosten um $10\% \cdot \log(M/M_0)$ verringern, wobei M_0 die derzeit zu je 500€ produzierte Menge und M die danach produzierte Menge ist mit $M_0 < M$. Wie viel abgesetzt werden kann, ergibt sich aus einer monoton fallenden Nachfragefunktion

$$N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad p \mapsto m = N(p).$$

Diese Funktion ordnet jedem Preis p die dann nachgefragte Stückzahl m zu. Um mehr absetzen zu können, kann man außer einer Preissenkung auch Werbeaktionen durchführen, welche die Nachfragefunktion nach oben verschiebt. Erhöht man also den derzeitigen Mindestwerbeetat $0 < W_0$ auf W mit $W > W_0$, so verursacht das zwar $W - W_0$ Mehrkosten, aber gleichzeitig steigt die Nachfrage bei $p > 0$ von $N(p)$ auf

$$\tilde{N}(p) := N(p)\left(1 + \log\left(\frac{W}{W_0}\right)\right).$$

Das Unternehmen muss allerdings vorsichtig handeln, weil ein sehr bekannter Großkonzern dieses Produkt auch anbieten könnte. Wenn dem so ist, führt dessen größerer Bekanntheitsgrad sehr bald zu einer völligen Verdrängung des Kleinunternehmens vom Markt. Der Großkonzern steigt genau dann ein, wenn

- die durch das Kleinunternehmen angeheizte Nachfrage dessen Produktionskapazität $\bar{M}$ übersteigt und somit Restbedarf besteht;
- eine Rentabilitätsschwelle für den Preis $\bar{p}$ überstiegen wird, die weit höher liegt als beim Kleinunternehmen.

Formulieren Sie ein geeignetes nichtlineares Optimierungsproblem, welches den Gewinn bei eventueller Produktions- und Werbeausweitung maximiert.

Aufgabe 6 *(Konvexe Funktionen)*

a) Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $f_i : C \to \mathbb{R}$ konvex und $\alpha_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, m$. Zeigen Sie, dass dann auch

$$f(x) := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(x)$$

konvex auf C ist.

b) Zeigen Sie, dass für ein festes $z \in \mathbb{R}^n$ die Funktion

$$f(x) := ||x - z||$$

konvex auf ganz $\mathbb{R}^n$ ist.

c) Zeigen Sie, dass

$$f(x) = e^x$$

strikt konvex auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 7 *(Kompaktheit)*

Sei X ein normierter Raum. Zeigen Sie die Äquivalenz

$$\dim X < \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad B_X := \{x \in X \ : \ ||x|| \leq 1\} \text{ ist kompakt.}$$

Hinweis: Benutzen Sie für die Rückrichtung das Lemma von Riesz.

Satz (Lemma von Riesz)
Sei X ein normierter Raum und U ein abgeschlossener Unterraum von X mit $U \neq X$. Ferner sei $0 < \delta < 1$. Dann existiert ein $x_\delta \in X$ mit $||x_\delta|| = 1$ und

$$||x_\delta - u|| \geq 1 - \delta \qquad \forall\, u \in U.$$

Aufgabe 8 *(Newton-Verfahren)*

In Aufgabe 4 wurde die Approximation der Hessematrix durch die Iterierten mittels BFGS berechnet. Dies entspricht einem Rang-2-Update in jedem Schritt. Es ist bekannt, dass BFGS ausgehend von einer definiten Matrix W_0 die Eigenschaft erhält. In der Praxis kann es aber unter Umständen vorkommen, dass die exakte Hessematrix in einem Punkt **nicht** definit ist - dann mach die Approximation mittels BFGS weniger Sinn. Es gibt neben BFGS noch andere Varianten die Hessematrix iterativ zu approximieren, z.B. die *symmetric rank-1* (SR1) Approximation

$$W_{k+1} = W_k + \frac{(y_k - W_k s_k)(y_k - W_k s_k)^T}{(y_k - W_k s_k)^T s_k} \qquad \textbf{(SR1)}$$

mit $y_k := \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$ und $s_k = x_{k+1} - x_k$. Die Wahl von W_0 ist dabei beliebig.

a) Ändern Sie die Datei `NewtonMethod.m` aus Aufgabe 3 derart ab, dass zusätzlich die Art des Newtonverfahrens mit den zugehörigen Parametern übergeben wird, also mit folgendem Funktionsaufruf

```
[X,fx,nit] = NewtonMethod(f,gradf,x,tol,type,param,sigma,beta)
```

mit den zusätzlichen Parametern

- `type` - ein String der den Typ der zweiten Ableitung bestimmt, also `type = 'exact'` oder `type = 'BFGS'` oder `type = 'SR1'`
- `param` - der zugehörige Parameter, d.h. entweder ein *function handle* (Hessematrix) oder die Anfangsiterierte W_0 als Matrix

Zurückgegeben werden soll der gesamte Pfad, d.h. `X` $= [x_0, x_1, x_2, ..., x^*]$, der optimale Funktionswert `fx` $= f(x^*)$ und die Anzahl der Iterationsschritte `nit`.

b) Schreiben Sie ein Testskript `testHessApp.m`. Betrachten Sie die Rosenbrockfunktion

$$f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2.$$

Untersuchen Sie das Verhalten der jeweiligen Verfahren für $\sigma = \beta = 0.5$ und den Startwerten

- $x_0 = (-5, -10)^T$
- $x_0 = (0, 0)^T$
- $x_0 = (-12, 50)^T$

Variieren Sie auch $W_0 = I$ oder $W_0 = \nabla^2 f(x_0)$. Diskutieren Sie die numerischen Ergebnisse und erläutern Sie die Stärken und Schwächen der einzelnen Verfahren.