Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic, Stefan Hain
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von PDE's
WiSe 2014/2015

# Übungsblatt 11

Besprechung 28.01.2015

## Aufgabe 1 (Fehlerschätzer) (5+5+5=15 Punkte)

Sei $\Omega = (0,1)$. Wir betrachten das folgende Randwertproblem:

$$\begin{aligned} (Lu)(x) &:= -\left((b(x)u'(x)\right)' + c(x)u(x) = f(x) \qquad \text{auf } \Omega, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

wobei die Funktionen $b, c$ glatt seien und die folgende Elliptizitätsbedingungen $b(x) \geq \bar{b} > 0$, $c(x) \geq 0$ für alle $x \in \Omega$ gelte. Ferner sei $\mathcal{T} := \{T_n \ : \ 0 \leq n \leq N-1\}$, $T_n := (x_n, x_{n+1})$, ein Gitter auf $\Omega$, wobei $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = 1$ und $h_{T_n} := x_{n+1} - x_n$. Weiter bezeichne $u_N \in \mathcal{S}_0^{1,1}$ die FE-Approximation, wobei

$$\mathcal{S}_0^{1,1} := \mathcal{S}^{1,1} \cap H_0^1(\Omega), \qquad \mathcal{S}^{1,1} = \left\{ v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \ : \ v|_T \in \mathcal{P}_1, T \in \mathcal{T} \right\}.$$

Wir definieren weiter für $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ die Bilinearform $a_{\tilde{\Omega}}(w,v) := \int_{\tilde{\Omega}} b(x)w'(x)v'(x) + c(x)v(x)\ dx$, sowie die Norm $\|v\|^2_{E,\tilde{\Omega}} := a_{\tilde{\Omega}}(v,v)$.

(i) Definieren Sie für jedes $T \in \mathcal{T}$

$$\eta_T^2 := h_T^2 \|f - Lu_N\|^2_{0;T}$$

und zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, welche unabhängig von $\mathcal{T}$ und von $u$ ist, so dass für den FE-Fehler $u - u_N$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\|u - u_N\|^2_{1;\Omega} \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2.$$

**Hinweis:** Sei $I_N : H^1(\Omega) \to \mathcal{S}^{1,1}$ der stückweise lineare Interpolant. Dann gilt für $g \in H^1(\Omega)$:

$$\|g - I_N g\|_{0;T_n} \leq c h_{T_{n-1}} \|g'\|_{0;T_n}.$$

(ii) Für $n = 0, \ldots, N-1$ sei $\varphi_{\mathrm{Dir},n} \in H_0^1(T_n)$ Lösung des folgenden Randwertproblems:

$$\begin{aligned} (L\varphi_{\mathrm{Dir},n})(x) &= f(x) - (Lu_N)(x), \qquad \text{auf } T_n, \\ \varphi_{\mathrm{Dir},n}(x_n) &= \varphi_{\mathrm{Dir},n}(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass dann die folgende Abschätzung gilt:

$$\sum_n \|\varphi_{\mathrm{Dir},n}\|^2_{E;T_n} \leq \|u - u_N\|^2_{E;\Omega}, \qquad \text{(Dirichlet-Schätzer).}$$

(iii) Für $n = 0, \ldots, N-1$ sei $\varphi_{\mathrm{Neu},n} \in H_0^1(T_n)$ Lösung des folgenden Randwertproblems:

$$\begin{aligned} (L\varphi_{\mathrm{Neu},n})(x) &= f(x) - (Lu_N)(x), \qquad \text{auf } T_n, \\ \varphi'_{\mathrm{Neu},n}(x_n) &= J_n, \\ \varphi'_{\mathrm{Neu},n}(x_{n+1}) &= J_{n+1}, \end{aligned}$$

wobei $J_n \in \mathbb{R}$ für alle $n$ belieblig ist. Zeigen Sie, dass dann die folgende Abschätzung gilt:

$$\|u - u_N\|^2_{E;\Omega} \leq \sum_n \|\varphi_{\mathrm{Neu},n}\|^2_{E;T_n}, \qquad \text{(Neumann-Schätzer).}$$

## Aufgabe 2 (Mehrgitter-Verfahren) (15 Punkte)

Mehrgitterverfahren sind in der numerischen Mathematik eine Klasse von Algorithmen, welche zum näherungsweisen Lösen von Gleichungssystemen eingesetzt werden, die meistens aus der Diskretisierung partieller Differentialgleichungen stammen. Die Grundidee besteht darin, den unbekannten Fehler zu einer gegebenen Näherung auf einem feinen Gitter, auf einem gröberen Gitter zu approximieren. Implementieren Sie das Mehrgitter-Verfahren, indem Sie die Schritte 1)-7) aus §3 im Skript umsetzen. Verwenden Sie hierzu $\mu = \nu = 5$ und testen Sie den V- ($R$=1) sowie den W-Zyklus ($R$=2).

**Hinweis:** Verwenden Sie die Lösung zu Blatt 5 oder 7 und ersetzen Sie beim Lösen des LGS den /-Operator durch das Multigrid-Verfahren. Vergleichen Sie beide Lösungen miteinander!