Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic, Stefan Hain
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von PDE's
WiSe 2014/2015

Übungsblatt 7

Besprechung 03.12.2014.

Aufgabe 1 (Nachtrag zu Blatt 4, Aufgabe 1) (5 Punkte)

Analog zu Aufgabe 1, Blatt 4 (wir verwenden hier die gleichen Bezeichnungen) berechnen Sie

$$\int_T \nabla\varphi_i\varphi_j \; d(x,y)$$

Aufgabe 2 (Koerzivitäts- und inf-sup Konstante) (10 Punkte)

Es sei $\mathcal{X} = H_0^1(\Omega)$, $(\cdot,\cdot)_1$ das H^1-Skalarprodukt und $\|\cdot\|_1$ die H^1-Norm. Ferner sei für $b \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ die Bilinearform $a : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u^T \nabla v \, dx + \int_\Omega b^T \nabla u \, v \, dx + \gamma \int_\Omega u \, v \, dx.$$

Sei $S(\mathcal{T}_h) \subset \mathcal{X}$ der diskrete Ansatz-Raum, der von den Hutfunktionen φ_i aufgespannt wird, A die Matrix, die zur Bilinearform a assoziiert ist, und M die Matrix, die zum H^1-Skalarprodukt assoziiert ist ($M_{j,i} := \int_\Omega \nabla\varphi_i^T \nabla\varphi_j \, dx + \int_\Omega \varphi_i^T \varphi_j \, dx$).
In dieser Aufgabe wollen wir

$$\alpha_h := \inf_{v \in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{a(v,v)}{\|v\|_1^2} \tag{1}$$

$$\beta_h := \inf_{v \in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \sup_{w \in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{a(v,w)}{\|v\|_1 \, \|w\|_1} \tag{2}$$

numerisch bestimmen.
Erweitern Sie das Paket `fem2d` derart, dass die Matrix A berechnet wird. Schreiben Sie weiter die Funktionen `alpha = CoerzRand(A,M,N)` und `beta = InfSupRand(A,M,N)`, die die Konstanten α_h und β_h approximieren. Dazu sollen jeweils N Zufallsvektoren als Koeffizientenvektoren von v und w angelegt werden und das Supremum bzw. Infimum durch das Maximum bzw. Minimum der Einträge berechnet werden. Achten Sie bei der Implementierung auf die Vektorisierung in Matlab (keine `for`-Schleifen!).

Alternativ kann man die Berechnung beider Konstanten auch auf Eigenwertprobleme (EWP) zurückführen.

(iii) Zeigen Sie: α_h ist der kleinste Eigenwert des verallgemeinerten EWP

$$A_s x = \lambda M x,$$

wobei $A_s := \frac{1}{2}(A + A^T)$ den symmetrischen Anteil von A bezeichnet.

Um die inf-sup-Konstante auf ein passendes EWP zurückzuführen definieren wir einen Operator T mit

$$T : S(\mathcal{T}_h) \to S(\mathcal{T}_h)$$
$$(Tw, v)_1 = a(w,v) \quad \forall\, v \in S(\mathcal{T}_h).$$

Der Satz von Riesz liefert uns dann

$$\|Tw\|_1 = \|a(w,\cdot)\|_{-1} =: \sup_{v\in S(\mathcal{T}_h)} \frac{A(w,v)}{\|v\|_1}.$$

Damit erhalten wir

$$\beta_h^2 := \left(\inf_{v\in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \sup_{w\in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{a(v,w)}{\|v\|_1\ \|w\|_1} \right)^2 = \inf_{v\in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{\|Tw\|^2}{\|w\|_1^2} = \inf_{v\in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{(Tw,Tw)_1}{(w,w)_1}$$

Aus der Definition des Operators T erhalten wir die Matrix-Darstellung $T = M^{-1}A^T$ (wieso?). Damit ergibt sich

$$\beta_h^2 = \inf_{v\in S(\mathcal{T}_h)\setminus\{0\}} \frac{(Tw,Tw)_1}{(w,w)_1} = \inf_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{x^TAM^{-1}MM^{-T}A^Tx}{x^TMx} = \inf_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{x^TAM^{-1}A^Tx}{x^TMx}.$$

Also ist β_h die Wurzel des kleinstes EW von

$$AM^{-1}A^Tx = \lambda Mx.$$

(iv) Erweitern Sie Ihr Skript, sodass die Konstanten α_h und β_h über EWP berechnet werden.

(v) Erweitern Sie Ihr Skript, sodass die Ausgangstriangulierung mehrfach verfeinert wird und berechnen Sie die Konstanten zu jeder Triangulierung. Plotten Sie die Konstanten in Abhängigkeit der Freiheitsgrade. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 3 (Konforme Methoden und Ansatzfunktionen) (5 Punkte)

Sei $k \geq 1$ und Ω beschränkt. Zeigen Sie, dass eine stückweise beliebig oft differenzierbare Funktion $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ genau dann zu $H^k(\Omega)$ gehört, wenn $v \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$ gilt.

Aufgabe 4 (Satz von Kato) (0 Punkte)

Entfällt oder wird auf nächstem Blatt nachgeliefert.