Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mladjan Radic, Stefan Hain
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von PDE's
WiSe 2014/2015

Übungsblatt 8

Besprechung 10.12.2014.

Aufgabe 1 (Satz von Kato) (15 Punkte)

Wir betrachten das folgende Poisson-Problem auf dem Einheitsquadrat $\Omega := [0,1]^2$:

$$\begin{aligned}-\Delta u(x,y) &= f(x,y),\\ u(0,y) &= 1+\sin(y),\\ u(1,y) &= \cos(1)+\sin(y),\\ u(x,0) &= \cos(x),\\ u(x,1) &= \cos(x)+\sin(1),\end{aligned}$$

mit $f(x,y) = \cos(x) + \sin(y)$. Wie man leicht nachrechnen kann, ist die exakte Lösung auf Ω dann durch

$$u(x,y) = \cos(x) + \sin(y)$$

gegeben. Wir orientieren uns an der Variationsformulierung von Blatt 5, Aufgabe 1 oder genauer: Finde ein $u \in H_0^1(\Omega)$, s.d.

$$\int_\Omega \nabla u^T \nabla v \; dx = \int_\Omega f\, v \; dx - \int_\Omega \nabla u_D^T \nabla v \; dx, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

a) Zeigen Sie zunächst, dass für die Koverzivitätskonstante α sowie der Stetigkeitskonstanten γ von

$$a(u,v) = \int_{[0,1]^2} \nabla u^T \nabla v \; dx$$

die folgenden Abschätzungen gelten:

- $a(v,v) \geq \frac{1}{2}\|v\|^2 \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$ und
- $a(u,v) \leq \|u\|\|v\| \qquad \forall u,v \in H_0^1(\Omega)$,

d.h. $\alpha = \frac{1}{2}$ und $\gamma = 1$.

Mit Hilfe des Satzes von Kato konnten wir die bisher bekannte Fehlerabschätzung

$$\|u-u_h\|_V \leq \left(1+\frac{\gamma}{\alpha}\right) \inf_{v_h \in V_h} \|u_h - v_h\|_V$$

verbessern und konnten folgende bessere Abschätzung beweisen:

$$\|u-u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \inf_{v_h \in V_h} \|u_h - v_h\|_V. \tag{1}$$

Überprüfen Sie dies nun numerisch, indem Sie obiges Beispiel mit Hilfe der Aufgabe 1 auf Blatt 5 zur Hilfe nehmen. Varrieren Sie hierbei die Anzahl der Knoten, indem Sie den Befehl `refine` verwenden. Gehen Sie anschließend wie folgt vor:

b) Die Abschätzung aus Teilaufgabe a) ist nur sehr grob (warum?). Bestimmen Sie daher die Koerzivitätskonstante numerisch mit Hilfe eines Eigenwertproblems. Nehmen Sie dazu Aufgabe 2 von Blatt 7 zu Hilfe.

c) Schreiben Sie eine Funktion `val = eval_u(y1,y2,elements,coordinates,u)`, welche zu einem vorgegebenen Punkt $(y_1, y_2)^T \in [0,1]^2$ den Wert

$$(u(y_1, y_2) - u_h(y_1, y_2))^2$$

bestimmt.
Tipp: Überprüfen Sie dazu zunächst, in welchem Element der Diskretisierung sich der Punkt $(y_1, y_2)^T$ befindet.

d) Schreiben Sie eine Funktion `val = eval_gradu(y1,y2,elements,coordinates)`, welche analog zu c) zu einem vorgegeben Punkt $(y_1, y_2)^T \in [0,1]^2$ den Wert

$$(\nabla u(y_1, y_2) - \nabla u_h(y_1, y_2))^2$$

bestimmt.

e) Schreiben Sie eine Funktion `I = myquad2D(fun,X,Y)`, welche ein Integral über Ω mit Hilfe der Trapezregel approximiert. Hierbei dürfen äquidistante Stützstellen gewählt werden.

f) Verwenden Sie die vorherigen Teilaufgaben um die Ungleichung (1) zu verifizieren. Überlegen Sie sich dazu auch, wie man die beste Approximation in unserem Fall bestimmen kann.

Aufgabe 2 (Konvektionsdominates Problem) (10 Punkte)

Für $\varepsilon > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^2$ und $\gamma \geq 0$ betrachten wir die elliptische PDE zweiter Ordnung

$$-\varepsilon \Delta u + \beta^T \nabla u + \gamma u = f.$$

Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben $\beta = (1,1)^T$ und $\gamma = 0$

(i) Verwenden Sie Aufgabe 2 von Blatt 7, um die Koerzivitätskonstante für immer kleiner werdende $\varepsilon > 0$ zu bestimmen. Was fällt auf?

(ii) Verwenden Sie die exakte Lösung $u(x,y) = \exp(-\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}x)\exp(-\epsilon y)$ um eine geeignete rechte Seite $f(x,y)$ und geeignete Dirichlet Randwerte aufzustellen. Betrachten Sie den Fehler für immer kleiner werdende ε.