



Numerische Lineare Algebra - Theorie-Blatt 2

(Abgabe am 12.11.2014 vor der Übung!)

Hinweise

Die Hinweise zur Abgabe der Übungsblätter finden Sie auf dem ersten Übungsblatt!

Aufgabe 4 (Aufwand)

(4+14 Punkte)

Sei $n = 2^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit (also insbesondere auch invertierbar!). Weiter sei $\mathcal{I}(n)$ der Aufwand zur Invertierung einer $(n \times n)$ -Matrix und $\mathcal{M}(n)$ der Aufwand zur Multiplikation zweier $(n \times n)$ -Matrizen. Zeigen Sie:

- (i) **Die Multiplikation zweier Matrizen ist nicht schwerer als die Invertierung**, d.h. es gilt

$$\mathcal{M}(n) = \mathcal{O}(\mathcal{I}(n)),$$

wobei wir $\mathcal{I}(n) = n^\alpha$, $\alpha > 0$ voraussetzen.

(Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete (3×3) -Blockmatrix und deren Inverse.)

- (ii) **Die Invertierung einer Matrix ist nicht schwerer als eine Matrix-Matrix-Multiplikation**, d.h. es gilt

$$\mathcal{I}(n) = \mathcal{O}(\mathcal{M}(n)).$$

Betrachten Sie dazu den folgenden Algorithmus zur Matrix-Invertierung:

Wir schreiben zunächst

$$A = \begin{pmatrix} B & C^T \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit $B, C, D \in \mathbb{R}^{n/2 \times n/2}$.

Mit dem Schurkomplement $S = D - CB^{-1}C^T$ ergibt sich dann für die Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} + B^{-1}C^T S^{-1}CB^{-1} & -B^{-1}C^T S^{-1} \\ -S^{-1}CB^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix},$$

wobei die Inversen S^{-1} , B^{-1} existieren und symmetrisch sind. Wir berechnen die Inverse von A folgendermaßen:

- (1) Berechne die Inverse von B rekursiv.
- (2) Berechne das Matrix-Produkt $W = CB^{-1}$ und die Transponierte $W^T = B^{-1}C^T$.
- (3) Berechne das Matrix-Produkt $X = WC^T (= CB^{-1}C^T)$ und die Matrix $S = D - X$.
- (4) Berechne die Inverse von S rekursiv.
- (5) Berechne das Matrix-Produkt $Y = S^{-1}W (= S^{-1}CB^{-1})$ und die Transponierte $Y^T = B^{-1}C^T S^{-1}$.
- (6) Berechne das Matrix-Produkt $Z = W^T Y (= B^{-1}C^T S^{-1}CB^{-1})$ und $B^{-1} + Z$.

Der Aufwand für die Berechnung einer Transponierten wird vernachlässigt.

Aufgabe 5 (*LR decomposition of tridiagonal matrices*)

(7+3 Punkte)

Let the tridiagonal matrix A be given by

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

We further assume that there exists the following LR decomposition

$$A = LR \quad \text{with} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \ell_1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad R = \begin{pmatrix} d_1 & r_1 & & & \\ & d_2 & r_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{n-1} & r_{n-1} \\ & & & & d_n \end{pmatrix}.$$

- (i) Derive formulas for the computation of ℓ_j , r_j ($j = 1, \dots, n-1$) and d_k ($k = 1, \dots, n$).
- (ii) Compute the computational complexity for the LR -decomposition with these formulas.

Aufgabe 6 (*Schachbrett-Matrizen, L^AT_EX*)

(6+6 Punkte)

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (n gerade), die ein Schachbrett-Muster aufweist:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & a_{1,3} & 0 & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & a_{2,4} & \cdots & 0 & a_{2,n} \\ a_{3,1} & 0 & a_{3,3} & 0 & \cdots & a_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & 0 & a_{n-1,3} & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & a_{n,2} & 0 & a_{n,4} & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Um beim Lösen des Gleichungssystems $Ax = b$ sowohl Speicher als auch Rechenaufwand zu sparen, kann wie folgt verfahren werden:

1. Spalte die Matrix auf in zwei Teilmatrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n-1} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,4} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{4,2} & a_{4,4} & \cdots & a_{4,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,2} & a_{n,4} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

2. Löse die Gleichungssysteme

$$A_1(x_1, x_3, \dots, x_{n-1})^T = (b_1, b_3, \dots, b_{n-1})^T, \quad A_2(x_2, x_4, \dots, x_n)^T = (b_2, b_4, \dots, b_n)^T.$$

Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

- (i) Berechnen Sie den Rechenaufwand für obige Methode zur Lösung eines Gleichungssystems mit Schachbrett-Matrix und vergleichen Sie ihn mit dem Aufwand zum Lösen des vollen Systems mit einer einfachen LR Zerlegung und Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen für $n = 2, 4, 6, 20$. Um welchen Faktor ist die angepasste Methode asymptotisch schneller als die Standard- LR Zerlegung mit Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen?
- (ii) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 1)^T.$$

mit dem oben beschriebenen Algorithmus.

Mehr Informationen zur Vorlesung und den Übungen finden Sie auf

<http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-numerik/lehre/ws1415/numla1.html>