Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2014/2015

Numerische Lineare Algebra - Theorie-Blatt 3

(Abgabe am 26.11.2014 **vor** der Übung!)

Hinweise

Die Hinweise zur Abgabe der Übungsblätter finden Sie auf dem ersten Übungsblatt!

Aufgabe 7 *(LR-Zerlegung)* (5+10+10 Punkte)

Zeigen Sie:

(i) Ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonaldominant und regulär, dann existiert eine LR-Zerlegung $A = L \cdot R$.

(ii) Falls eine LR-Zerlegung $A = L \cdot R$ existiert, so ist diese eindeutig. Gehen dazu in folgenden Schritten vor:

  (a) Das Produkt zweier unterer Dreiecksmatrizen L_1 und L_2 ist wieder eine untere Dreiecksmatrix. Das Produkt zweier unipotenter unterer Dreiecksmatrizen L_1 und L_2 ist wieder eine unipotente untere Dreiecksmatrix.

  (b) Die Inverse einer regulären unteren Dreiecksmatrix L ist wieder eine untere Dreiecksmatrix. Die Inverse einer regulären, unipotenten unteren Dreiecksmatrix L ist wieder eine unipotente untere Dreiecksmatrix.

  (c) Analog gilt (a) und (b) auch für obere Dreiecksmatrizen (Muss nicht extra gezeigt werden.)

  (d) Die LR-Zerlegung ist eindeutig. Nehmen Sie $A = L_1R_1 = L_2R_2$ an und zeigen Sie, dass $L_1 = L_2$ und $R_1 = R_2$ gilt.

(iii) Bestimmen Sie mittels Spalten-Pivotisierung die LR-Zerlegung der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -4 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Matrizen L, R und P mit $PA = LR$ sowie alle Zwischenschritte an.

Aufgabe 8 *(Cholesky-Zerlegung, LaTeX)* (10+5 Punkte)

Proof the following statements:

(i) If the matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is strictly diagonally dominant, A is regular.

(ii) There exist diagonally dominant matrices that are not regular.