Prof. Dr. Stefan Funken
M.Sc. Andreas Bantle
Dipl.-Math. oec. Klaus Stolle

Universität Ulm
Institut für Numerische Mathematik
Wintersemester 2014/2015

Numerische Lineare Algebra - Theorie-Blatt 7

(Abgabe am 04.02.2015 **vor** der Übung!)

Hinweise

Die Hinweise zur Abgabe der Übungsblätter finden Sie auf dem ersten Übungsblatt!

Aufgabe 16 *(Satz von Stein-Rosenberg, LaTeX)* (15 Punkte)

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Berechnen Sie für die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

jeweils die Iterationsmatrizen C_J bzw. C_G für das Jacobi- bzw. das Gauss Seidel Verfahren, sowie die Spektralradien der Matrizen C_J und C_G.
Was lässt sich über die Konvergenz der beiden Verfahren für die jeweilige Matrix A_i $(i \in \{1, 2\})$ sagen? Widerspricht das dem Satz von Stein und Rosenberg?

Aufgabe 17 *(Gradienten-Verfahren)* (15 Punkte)

(a) Perform three steps of the Gradient Method for the linear system

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

and initial point $\mathbf{x}_0 = (2, 2)^T$. Draw $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_3$ into a two dimensional coordinate system.

(b) We consider the linear system

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

As initial point for the Gradient Method we use $\mathbf{x}_0 = (a, 1)^T$. Show that with the $k - th$ iterate $\mathbf{x}_k = (x_k, y_k)^T$ there holds $\mathbf{x}_{k+1} = \rho \cdot (x_k, -y_k)^T$, with $\rho = \frac{a-1}{a+1}$. For $a = 20$, draw $\mathbf{x}_0, \dots \mathbf{x}_5$ into a two dimensional coordinate system (choose the scaling of the axes appropriately).