Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Florian Kunstmann
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerische Optimierung
WiSe 2015/2016

Übungsblatt 2

Besprechung 28.10.2015.

Hinweise: Die Abgabe der Lösungen der Matlab-Aufgaben erfolgt per Email (bis 18 Uhr am Vortag der Besprechung!) an

florian.kunstmann@uni-ulm.de.

Der Betreff sollte lauten "Num3Blatt$x$" (wobei x für die Nummer des Blattes steht). Die Lösungen müssen als **Anhang** an die Email versendet werden. Für jede Programmieraufgabe ist ein zip-file "AufgabeMy" zu erstellen (wobei y für die Nummer der Aufgabe steht), das die nötigen .m-files enthält.

Fortsetzung Aufgabe 3 („Zeit der Rekorde schon bald vorbei[1]"(?)) (4 Punkte)

Laden Sie sich die erweiterte Datei `WR.m` von der Vorlesungsseite herunter. Lösen Sie die übrigen vier Ausgleichsprobleme (5000/10000m, Frauen/Männer), indem Sie eine geeignete Anfangsschätzung selbst bestimmen und die Schrittweitensteuerung nach Levenberg-Marquardt verwenden. Geben Sie die besten Anfangsschätzungen mit zugehörigen Plots ab.
Hinweis: Testen Sie Ihr Programm zunächst für die Aufgabenstellung aus a). Wenn dies klappt, überlegen Sie sich Startwerte, so dass für die 100m Weltrekorde ähnliche Plots wie in Abbildung 1 entstehen. Hat dies auch geklappt, so versuchen Sie nun für die übrigen Ausgleichsprobleme passende Startwerte zu finden.

Aufgabe 4 (Gauß-Newton vs. Levenberg) (3+2+2+2 Punkte)

Wir betrachten die folgende Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$F(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ \lambda x^2 + x - 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist.

(i) Zeigen Sie, dass das nichtlineare Auslgeichsproblem

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|_2^2 \to \min$$

für $\lambda < 1$ ein lokales Minimum in $x = 0$ besitzt. Zeigen Sie ferner, dass dies für $\lambda < \frac{7}{16}$ das einzige lokale Minimum ist.

(ii) Weisen Sie nach, dass $x = 0$ für $\lambda < -1$ ein abstoßender Fixpunkt des Gauß-Newton-Verfahrens ist, d.h.,

$$\exists \delta > 0 : \ |x_{k+1} - 0| > |x_k - 0| \quad \forall x_k : \ 0 < |x_k - 0| < \delta.$$

(iii) Zeigen Sie, dass andererseits die Iterierten des Levenberg-Marquardt-Verfahrens für $\lambda < \frac{7}{16}$ global gegen $x = 0$ konvergieren.

(iv) Verwenden Sie Ihre Implementierungen aus Aufgabe 3 und wenden Sie diese auf die obige Funktion an. Verifizieren Sie obige Aussagen.

[1] SPIEGEL ONLINE, 17.11.2005

Aufgabe 5 (Reelle Schur-Zerlegung und Anwendung) **(3+2 Punkte)**

(i) Zeigen Sie, dass jede reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reelle Schur-Zerlegung besitzt, d.h. es existiert eine unitäre Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sodass

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} B_1 & * & * & * \\ 0 & B_2 & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & B_j \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(B_1, B_2, ...B_j) + N$$

wobei die Blöcke B_k entweder die Form

$$B_k = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

haben oder $B_k \in \mathbb{R}$ ist. N ist die durch Sternchen angedeutete rechte obere Dreiecksmatrix. Was für Aussagen lassen sich weiterhin über die Matrix N treffen ?

(ii) Zeigen Sie für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und eine induzierte Norm $||\cdot||$ die Aussage:

$$\lim_{n\to\infty} ||A^n|| = 0 \;\Leftrightarrow\; \rho(A) < 1.$$

Hierbei bezeichnet $\rho(A)$ den Spektralradius von A. (Bemerkung: Sie können diese Aussage ebenfalls für die Frobenius Norm zeigen.)

Aufgabe 6 (Rayleigh-Quotient) **(3+2+1 Punkte)**

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei A symmetrisch ist und $x \in \mathbb{R}^n$, ist der Rayleigh-Quotient definiert als

$$r(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x}.$$

(i) Zeigen Sie, dass folgende Aussage gilt:

$$\nabla r(x) = \frac{2}{x^T x} (Ax - r(x)x)$$

(ii) Beweisen Sie: Für einen Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^n$ von A gilt:

$$|r(x) - r(v)| = \mathcal{O}\left(||x - v||^2\right) \quad \text{für } x \to v.$$

(iii) Was lässt sich daraus folgern?