Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Florian Kunstmann
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Übungsblatt 3

Besprechung 04.11.2015.

Hinweise: Die Abgabe der Lösungen der Matlab-Aufgaben erfolgt per Email (bis 18 Uhr am Vortag der Besprechung!) an

florian.kunstmann@uni-ulm.de.

Der Betreff sollte lauten "Num3Blatt$x$" (wobei x für die Nummer des Blattes steht). Die Lösungen müssen als **Anhang** an die Email versendet werden. Für jede Programmieraufgabe ist ein zip-file "AufgabeMy" zu erstellen (wobei y für die Nummer der Aufgabe steht), das die nötigen .m-files enthält.

Aufgabe 7 (Potenzmethode) (3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch mit den Eigenwerten:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r, \quad |\lambda_1| = |\lambda_2| = \cdots = |\lambda_r| > |\lambda_{r+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Zudem sei $\{v_k, k = 1, \ldots, n\}$ eine Basis aus Eigenvektoren und der Startvektor $x^{(0)}$ sei gegeben durch

$$x^{(0)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k,$$

wobei mindestens ein $\alpha_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, r$. Zeigen Sie, dass die Folge $x^{(k)} = A^k x^{(0)}$ der Potenzmethode gegen $v = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k v_k$ konvergiert und erklären Sie, wieso v ein Eigenvektor von A ist.

Aufgabe 8 (Inverse Iteration) (2+2+2 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

(a) Schätzen Sie die Eigenwerte von A mit Hilfe der Gerschgorin-Kreise ab.

(b) Führen Sie einen Schritt der inversen Vektoriteration durch mit Spektralverschiebung zum Startwert $x_0 = (0, 1, 0)^T$, um eine Näherung zum Eigenwert nahe bei $\mu = 5$ zu erhalten. Lösen Sie das Gleichungssystem dabei mit Hilfe einer LR-Zerlegung und geben Sie auch x_1 an (für die LR Zerlegung dürfen Sie Matlab verwenden).

(c) Welche Fehlerreduktion können Sie in (b) pro Iterationsschritt erwarten? Benutzen Sie die Ergebnisse aus (a).

Aufgabe 9 (Implizites Q-Theorem) (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und seien $Q = (q_1, \ldots, q_n), U = (u_1, \ldots, u_n)$ unitär, so dass $H = Q^H AQ$ und $G = U^H AU$ in Hessenbergform sind. Zeigen Sie, falls $q_1 = u_1$ und H unreduziert ist, dass gilt:

$$q_j = z_j u_j \text{ mit } |z_j| = 1 \qquad \text{und} \qquad |h_{j,j-1}| = |g_{j,j-1}|, \; j = 2, \ldots, n.$$

Das bedeutet, sobald die erste Spalte von Q festgelegt ist, sind alle weiteren Spalten der Matrix Q, welche A auf Hessenbergform bringt, bis auf eine Konstante vom Betrage eins eindeutig bestimmt.

Aufgabe 10 (Inverse Potenzmethode) (5 Punkte)

(a) Laden Sie die Funkion `myLuCols.m`, die eine LU-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung durchführt, von der Homepage herunter und vervollständigen Sie diese, sodass sie für die inverse Iteration verwendet werden kann.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `[lambda,v, R]=invIteration(A,x,mu,tol,maxit)`, die die inverse Iteration nach Wielandt durchführt. Die Eingabeparameter sind hier

- `A`: Matrix, deren Eigenwert bestimmt werden soll
- `x`: Startvektor
- `mu`: Näherung des Eigenwerts, der bestimmt werden soll
- `tol`: Toleranz für das Abbruchkriterium
- `maxit`: Maximale Anzahl von Iterationen

Die Rückgabewerte sind

- `lambda`: Näherungswert für den gesuchten Eigenwert
- `v`: Zugehöriger Eigenvektor
- `R`: Vektor, der die $\rho^{(k)}$ für jeden Iterationsschritt enthält.

Testen Sie Ihre Funktion mit den Daten, die in der Datei `invPotInput.mat` gespeichert sind und stellen Sie den Fehler in einer passenden Grafik dar.

(c) Schreiben Sie eine Funktion `[lambda,v, R]=invIterationAdap(A,x,mu,tol,maxit)`, die die inverse Iteration durchführt. Hierbei soll `mu` in jedem Schritt angepasst werden (siehe Skript Kapitel 2.4). Testen Sie Ihre Funktion wieder mit den Daten aus `invPotInput.mat`. Vergleichen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit (bzgl. der Anzahl der Iterationen und bzgl. der Zeit) mit der Funktion aus Teil (b).