Prof. Dr. Karsten Urban
M.Sc. Mazen Ali
Institut für Numerische Mathematik
Universität Ulm

Numerik von ell. PDG
WiSe 2017/2018

Übungsblatt 6

Besprechung 29.11.2017.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^d \; : \; |x| < 1\right\}, \; u(x) = |x|^{2\alpha}$. Bestimmen Sie für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion u in $H^1(\Omega)$ liegt. Hier bezeichnet $|x|$ die Euklidische Norm

$$|x| = \left(\sum_{k=1}^{d} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

Verwenden Sie hierzu den folgenden Satz:

Satz (Zwiebelformel)

Sei $S_r^{d-1} := \left\{x \in \mathbb{R}^d \; : \; |x| = r\right\}$ und bezeichne σ das Oberflächenmaß. Sei weiter $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^d \; : \; R_1 \leq |x| \leq R_2\right\}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann ist f über S_r^{d-1} für fast alle r integrierbar und

$$\int_\Omega f(x)dx = \int_{R_1}^{R_2} \left(\int_{S_1^{d-1}} f(rx)d\sigma\right) r^{d-1}dr.$$