Dr. Christian Löwenstein
Thomas Sasse
Michael Gentner

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Wintersemester 2014/15

Übungen zur Kombinatorik

Übungsblatt 3

Abgabe: 28. November 2014, vor der Vorlesung (12:15 Uhr)

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Zeigen Sie durch einen kombinatorischen Beweis die Gleichung

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}.$$

Tipp: Betrachten Sie die Färbung der Elemente der Menge $[n]$ mit drei Farben, wobei eine Farbe genau m-mal verwendet wird und die anderen drei beliebig oft.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Zeigen Sie durch einen kombinatorischen Beweis die Gleichung

$$\sum_{k} \binom{n}{k} S_{k,m} = S_{n+1,m+1}.$$

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ ist die *Bellsche Zahl* B_n die Anzahl aller Partitionen einer n-elementigen Menge. Man setzt $B_0 = 1$. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

(a) $B_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}$,

(b) $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Eine Permutation $\pi \in S_n$ ist eine *Involution*, wenn $\pi^2 = id$ gilt, d.h. wenn alle Zyklen die Länge 1 oder 2 haben. Zeigen Sie für die Anzahl i_n der Involutionen in S_n die Rekursion $i_{n+1} = i_n + n i_{n-1}$, wobei $i_0 = 1$ gesetzt wird. Was ist die Anzahl der Involutionen in S_n ohne Fixpunkte, d.h. die Anzahl der Permutationen, deren Zyklen alle die Länge 2 haben?

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Beweisen Sie die Rekursion aus Satz 2.16 der Vorlesung:

Seien $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$. Es gilt $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}$.