Dr. Christian Löwenstein
Thomas Sasse
Michael Gentner

Institut für Optimierung und Operations Research
Universitt Ulm
Wintersemester 2014/15

Übungen zur Kombinatorik

Übungsblatt 6

Abgabe: 23. Januar 2015, vor der Vorlesung (12:15 Uhr)

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Wie viele Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ besitzt die Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$$

mit

(a) $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{N}^5$, bzw.

(b) $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \{-5, -4, \ldots, 29, 30\}$?

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Zeigen Sie die folgenden Aussagen für formale Potenzreihen.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c^n x^n = 1/(1-cx)$.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1/(1-x)^2$.

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n = (1+x)/(1-x)^3$.

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Lösen Sie die Rekursion

$$a_n = \frac{9}{2}a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2a_{n-3}$$

mit den Anfangswerten $a_0 = 5$, $a_1 = 8$ und $a_2 = 21$.

Aufgabe 4. (9 Punkte)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Folge definiert durch $a_0 = 1$ und $a_1 = 1$ und

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2^n$$

für $n \geq 2$.

(a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(Lösung: $\frac{(1-3x)(1-2x)+4x^2}{(1-2x)(1-4x+3x^2)}$. Die Lösung dürfen Sie für (b) und (c) benutzen, jedoch nicht für (a).)

(b) Lösen Sie die Rekursion $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(c) Geben Sie eine lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an.

Aufgabe 5. (3 Punkte)
Sei $a_n = (2n+1)2^n + (-3)^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Geben Sie eine lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ an.

Bonusaufgabe 1. (6 Punkte)

(a) Sei $F(z)$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$, dass

$$F^k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots+n_k=n \\ n_i\in\mathbb{N}_0}} a_{n_1} a_{n_2} \cdots a_{n_k} z^n.$$

(Tipp: Induktion nach k.)

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass für $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} z^n = \frac{1}{(1-z)^m}.$$