Dr. Christian Löwenstein
Thomas Sasse
Michael Gentner

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Wintersemester 2014/15

Übungen zur Kombinatorik

Übungsblatt 7

Abgabe: 06. Februar 2015, vor der Vorlesung (12:15 Uhr)

Aufgabe 1. (6 Punkte)
Bezeichne f_n die n-te Fibonacci-Zahl, d.h. $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 2$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{2n} x^n = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}-x} - \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}-x}\right).$$

(**Tipp:** Addieren Sie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n (-x)^n$.)

(b) $f_{n+k} = f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n$ für $n, k \geq 2$.
(**Tipp:** Benutzen Sie keine erzeugende Funktionen.)

(c) Die Zahl $\frac{f_1}{10} + \frac{f_2}{100} + \frac{f_3}{1000} + \frac{f_4}{10000} + \ldots$ ist rational.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Zeigen sie, dass gilt:

(a) $c(n)$ ist die Anzahl aller Gitterwege von $(0,0)$ nach $(n-1, n-1)$ derart, dass für alle Punkte (x, y) dieser Gitterwege gilt $y \leq x$.

(b) Für $n \geq 1$ gilt:

$$c(n) = \left|\left\{(a_0, a_1, ..., a_{n-2}) \in {\mathbb{N}_0}^{n-1} \mid a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_{n-2},\ \forall i : a_i \leq i\right\}\right|$$

(**Tipp:** Benutzen sie (a).)

Wobei $c(n)$ die Catalan-Zahlen aus der Vorlesung bezeichnet.

Aufgabe 3. (6 Punkte)
Sei $a_n = 2^n + 5^n$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Geben Sie eine geschlossene Formel für die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(b) Geben Sie eine geschlossene Formel für die exponentiell erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(c) Geben Sie eine lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten an, die die a_n erfüllen.

Bonusaufgabe 1. (6 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei a_n die Anzahl der Abbildungen $f : [n] \to [n]$ mit

$$\exists m \in [n] : f([n]) = \{f(i) : i \in [n]\} = [m].$$

Sei weiter $a_0 = 1$.

(a) Zeigen Sie $2a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) Beweisen Sie

$$e^x \hat{A}(x) = 2\hat{A}(x) - 1$$

für die exponentiell erzeugende Funktion $\hat{A}(x)$ der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe von (b), dass $a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}$ gilt.

Bonusaufgabe 2. (6 Punkte)
Geben Sie eine geschlossene Formel die exponentielle erzeugende Funktion $\hat{B}(z)$ der Bernoulli-Zahlen $(B_n)_{n=0}^{\infty}$, die durch die folgende rekursive Darstellung gegeben sind:

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, \\ B_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k, \quad \text{für } n \geq 2. \end{aligned}$$

(**Tipp:** Die Aufgabe ist korrekt gestellt. Für die Lösung benötigen Sie den Wert B_1, den Sie erhalten indem sie $n = 2$ in die Rekursionsvorschrift einsetzen.)