Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Dr. Christian Löwenstein

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Wintersemester 2013/14

Matroide und submodulare Funktionen

Übungsblatt 3

Besprechung: 03. Dezember 2013

Aufgabe 1. Beweisen Sie folgendes Lemma der Vorlesung:

Lemma 1.35. *Sei M ein Matroid mit Grundmenge E und sei $X \in E$. Dann gilt*

(i) X ist genau dann unabhängig, wenn $E - X$ cospannend ist.

(ii) X ist genau dann spannend, wenn $E - X$ counabhängig ist.

(iii) X ist genau dann eine Hyperebene, wenn $E - X$ ein Cokreis ist.

(iv) X ist genau dann ein Kreis, wenn $E - X$ eine Cohyperebene ist.

Aufgabe 2. Sei M ein Matroid und $\emptyset \neq C^* \subseteq E(M)$. Zeigen Sie: C^* ist genau dann ein Cokreis von M, wenn C^* $\subseteq$-minimal ist mit der Eigenschaft, dass $|C \cap C^*| \neq 1$ für alle Kreise $C \in \mathcal{C}(M)$.

Definition. Ein **abstraktes Dual** eines Multigraphen G ist ein Multigraph G', für den es eine Bijektion $\chi : E(G) \to E(G')$ gibt mit der Eigenschaft: F ist genau dann die Kantenmenge eines Kreises, wenn $\chi(F)$ ein $\subseteq$-minimaler Schnitt in G' ist, und umgekehrt.

Aufgabe 3. (Whitney 1933; Korte, Vygen, 2. deutsche Auflage, Aufgabe 2.39)
Sei G ein Multigraph. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Hat G ein abstraktes Dual und ist H ein Minor von G, so hat H auch ein abstraktes Dual.

(Tipp: Zeigen Sie, dass $G' - e$ abstraktes Dual von G kontrahiert e ist, und G' kontrahiert e abstraktes Dual von $G - e$ ist.)

(b) Bezeichne g die Taillenweite von G und sei G' abstraktes Dual von G, dann gilt

$$n(G') \leq \left\lfloor \frac{2E(G)}{g} \right\rfloor.$$

(c) Weder K_5 noch $K_{3,3}$ hat ein abstraktes Dual.

(Tipp: (b).)

(d) G ist genau dann planar, wenn G ein abstraktes Dual hat.