Prof. Dr. Dieter Rautenbach
Dr. Christian Löwenstein

Institut für Optimierung und Operations Research
Universität Ulm
Wintersemester 2013/14

Matroide und submodulare Funktionen

Übungsblatt 4

Besprechung: 17. Dezember 2013

Aufgabe 1. Beweisen Sie folgendes Lemma der Vorlesung:

Lemma 1.50. (Korte Vygen Lemma 13.27)
Sei $(E,\mathcal{U})$ *ein Matroid und* $X \in \mathcal{U}$. *Seien* $x_1, \ldots, x_s \in X$ *und* $y_1, \ldots, y_s \in X^c$ *mit*

(a) $x_k \in C(X, y_k)$ *für* $1 \leq k \leq s$ *und*

(b) $x_j \notin C(X, y_k)$ *für* $1 \leq j < k \leq s$.

Dann ist $(X - \{x_1, \ldots, x_s\}) \cup \{y_1, \ldots, y_s\} \in \mathcal{U}$.

Aufgabe 2. (a) Sei $E = E_1 \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, E_k$ eine Partition einer endlichen Menge E und sei $\mathcal{U} = \{U \subseteq E \mid |U \cap E_i| \leq 1 \text{ für alle } i \in [k]\}$. Zeigen Sie, dass $(E,\mathcal{U})$ ein Matroid ist.

(b) Sei G ein (einfacher) Graph und seien die Kanten von G mit k Farben gefärbt, d.h. $E(G)$ ist partioniert in Mengen $E_1 \,\dot\cup\, \cdots \,\dot\cup\, E_k$, die Farben genannt werden. Zeigen Sie folgende Aussage mit Hilfe des Matroid Intersection Theorem: G enthält genau dann einen spannenden Baum, dessen Kanten alle unterschiedlich gefärbt sind, wenn $G - F$ höchstens $t + 1$ Komponenten hat, für jede Vereinigung F von t Farben für alle $0 \leq t \leq k$.

Aufgabe 3. (Chappell 1994, West Aufgabe 8.2.50)
Zeigen Sie folgende Aussage mit Hilfe des Matroid Intersection Theorem: In jeder azyklischen Orientierung eines (einfachen) Graphen G kann die Eckenmenge mit höchstens $\alpha(G)$ paarweise eckendisjunkter Wege überdeckt werden.

Aufgabe 4. (Edmonds 1970, Korte Vygen Aufgabe 13.21)
Seien M_1 und M_2 zwei Matroide mit identischer Grundmenge E. Sei $X \subseteq E$ eine kardinalitätsmaximale partionierbare Teilmenge bzgl. M_1 und M_2^*, d.h. $X = X_1 \,\dot\cup\, X_2$ mit $X_1 \in \mathcal{U}(M_1)$ und $X_2 \in \mathcal{U}^*(M_2)$. Sei $B_2 \supseteq X_2$ eine Cobasis von M_2. Man beweise, dass $X - B_2$ eine Menge maximaler Kardinalität in $\mathcal{U}(M_1) \cap \mathcal{U}(M_2)$ ist.