Übungen zu Mathematik für Biologen

Prof. Dr. Dieter Kalin
Dr. Dirk Meierling

WS 2014/2015

Übungsblatt 8

Abgabetermin: Mittwoch, 17. Dezember 2014, vor den Übungen um 11:00 Uhr

---

Wir kennen bereits eine Möglichkeit, das Bildungsgesetz einer Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ anzugeben, nämlich durch eine Funktionsvorschrift, etwa $a_n = \frac{1}{n}$ oder $a_n = \frac{2^n}{n!}$. Eine weitere Möglichkeit ist die Angabe einer Rekursionvorschrift. Dazu nennt man einen oder mehrere Anfangswerte sowie eine Vorschrift, wie ein Folgenglied aus den vorhergehenden Gliedern berechnet werden kann. Das wohl bekannteste Beispiel für eine Folge, die sich wesentlich einfacher durch eine Rekursions- als durch eine Funktionsvorschrift beschreiben lässt, ist die Fibonacci[1]-Folge $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, die durch die zwei Anfangsglieder $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$ sowie die Rekursionsvorschrift

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \text{ für } n \in \mathbb{N}_0$$

definiert ist. Die ersten zehn Folgenglieder sind also $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34$.

([1]Nach Leonardo Bonacci, genannt Fibonacci, der sie im Jahr 1202 in *Liber Abbaci* beschrieb.)

Aufgabe 1. Zeige die Gültigkeit der folgenden Gleichung für alle $n \in \mathbb{N}_0$. (2P)

$$\sum_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

Aufgabe 2. Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nennt man genau dann *nach unten beschränkt*, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \geq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (8P)

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge reeller Zahlen, die durch folgende Rekursionsvorschrift definiert ist. Zeige, dass $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ durch K nach unten beschränkt und monoton fallend ist. Folgere daraus, dass $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert und berechne den Grenzwert.

(i) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ für $n \geq 1$, $K = 0$;

(ii) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n}$ für $n \geq 1$, $K = \sqrt{2}$.

(Hinweis: Konvergiert eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ gegen den Grenzwert a, so konvergiert auch die Folge $(a_{n+1})_{n=1}^{\infty}$ gegen den Grenzwert a.)

Aufgabe 3. Seien $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $c_n = a_n b_n$ Folgen reeller Zahlen. Beweise folgende Aussagen oder widerlege sie mit Hilfe eines Gegenbeispiels. (6P)

(i) Sind $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt, so ist $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt;

(ii) Ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt, so konvergiert $(c_n)_{n=1}^{\infty}$;

(iii) Ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt, so ist $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Nullfolge.

(Hinweis: Nützliche Folgen für die Konstruktion von Gegenbeispielen sind etwa $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $s_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ oder die Folge $((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$.)

Aufgabe 4. Seien $x, y \in (0, \infty)$. Vereinfache folgende Terme mit Hilfe der Potenzgesetze. (3P)

(i) $\sqrt[4]{\frac{x^6 x^7 x^8}{x^5}}$;

(ii) $\frac{x^3}{x^{-5}} + \frac{y^2 y^{-4} x^5}{y^{-2} x^{-3}}$;

(iii) $\dfrac{\sqrt[3]{\left(xy\sqrt[3]{y^4}\right)}\sqrt[3]{xy^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{2}{3}}}$.