Input: (P) : $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ wie an der Tafel.
Output: Eine optimale Lösung x^* von (P) oder die Aussage, dass $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ leer ist.

begin

$P_1^1 \leftarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$;

$k \leftarrow 1$;

repeat

if $\forall j \in [k] : P_k^j = \emptyset$ **then return** $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ *ist leer*;

until $0 \neq 1$;

end

Algorithm 1: Branch-and-Bound Methode nach Dakin

©2013 Institut für Optimierung und Operations Research, Universität Ulm, Dr. Jens Maßberg

Input: (P) : $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ wie an der Tafel.
Output: Eine optimale Lösung x^* von (P) oder die Aussage, dass $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ leer ist.

begin
$P_1^1 \leftarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$;
$k \leftarrow 1$;
repeat
if $\forall j \in [k] : P_k^j = \emptyset$ **then return** $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ *ist leer*;
$\mu_j \leftarrow \max\{c^T x \mid x \in P_k^j\}$ für $j \in [k]$;

until $0 \neq 1$;
end

Algorithm 2: Branch-and-Bound Methode nach Dakin

©2013 Institut für Optimierung und Operations Research, Universität Ulm, Dr. Jens Maßberg

Input: $(P) : \max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ wie an der Tafel.
Output: Eine optimale Lösung x^* von (P) oder die Aussage, dass $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ leer ist.

begin
- $P_1^1 \leftarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$;
- $k \leftarrow 1$;
- **repeat**
  - **if** $\forall j \in [k] : P_k^j = \emptyset$ **then return** $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ *ist leer*;
  - $\mu_j \leftarrow \max\{c^T x \mid x \in P_k^j\}$ für $j \in [k]$;
  - Bestimme $j^* \in [k]$ mit $\mu_{j^*} = \max\{\mu_j \mid j \in [k]\}$;
- **until** $0 \neq 1$;

end

Algorithm 3: Branch-and-Bound Methode nach Dakin

©2013 Institut für Optimierung und Operations Research, Universität Ulm, Dr. Jens Maßberg

Input: (P) : $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ wie an der Tafel.
Output: Eine optimale Lösung x^* von (P) oder die Aussage, dass $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ leer ist.

begin

$P_1^1 \leftarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$;

$k \leftarrow 1$;

repeat

if $\forall j \in [k] : P_k^j = \emptyset$ **then return** $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ *ist leer*;

$\mu_j \leftarrow \max\{c^T x \mid x \in P_k^j\}$ für $j \in [k]$;

Bestimme $j^* \in [k]$ mit $\mu_{j^*} = \max\{\mu_j \mid j \in [k]\}$;

Bestimme $x^* \in P_k^{j^*}$ mit $c^T x^* = \mu_{j^*}$;

until $0 \neq 1$;

end

Algorithm 4: Branch-and-Bound Methode nach Dakin

©2013 Institut für Optimierung und Operations Research, Universität Ulm, Dr. Jens Maßberg

Input: (P) : $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ wie an der Tafel.
Output: Eine optimale Lösung x^* von (P) oder die Aussage, dass $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ leer ist.

begin

$P_1^1 \leftarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$;

$k \leftarrow 1$;

repeat

if $\forall j \in [k] : P_k^j = \emptyset$ **then return** $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ *ist leer*;

$\mu_j \leftarrow \max\{c^T x \mid x \in P_k^j\}$ für $j \in [k]$;

Bestimme $j^* \in [k]$ mit $\mu_{j^*} = \max\{\mu_j \mid j \in [k]\}$;

Bestimme $x^* \in P_k^{j^*}$ mit $c^T x^* = \mu_{j^*}$;

if $x^* \in \mathbb{Z}^n$ **then return** x^*;

until $0 \neq 1$;

end

Algorithm 5: Branch-and-Bound Methode nach Dakin

©2013 Institut für Optimierung und Operations Research, Universität Ulm, Dr. Jens Maßberg

Input: (P) : $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ wie an der Tafel.
Output: Eine optimale Lösung x^* von (P) oder die Aussage, dass $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ leer ist.

begin

$P_1^1 \leftarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$;

$k \leftarrow 1$;

repeat

if $\forall j \in [k] : P_k^j = \emptyset$ **then return** $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ *ist leer*;

$\mu_j \leftarrow \max\{c^T x \mid x \in P_k^j\}$ für $j \in [k]$;

Bestimme $j^* \in [k]$ mit $\mu_{j^*} = \max\{\mu_j \mid j \in [k]\}$;

Bestimme $x^* \in P_k^{j^*}$ mit $c^T x^* = \mu_{j^*}$;

if $x^* \in \mathbb{Z}^n$ **then return** x^*;

Bestimme $i \in [n]$ mit $x_i^* \notin \mathbb{Z}$;

until $0 \neq 1$;

end

Algorithm 6: Branch-and-Bound Methode nach Dakin

©2013 Institut für Optimierung und Operations Research, Universität Ulm, Dr. Jens Maßberg

Input: (P) : $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ wie an der Tafel.

Output: Eine optimale Lösung x^* von (P) oder die Aussage, dass $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ leer ist.

begin

$P_1^1 \leftarrow \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$;

$k \leftarrow 1$;

repeat

if $\forall j \in [k] : P_k^j = \emptyset$ **then return** $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid Ax \leq b\}$ *ist leer*;

$\mu_j \leftarrow \max\{c^T x \mid x \in P_k^j\}$ für $j \in [k]$;

Bestimme $j^* \in [k]$ mit $\mu_{j^*} = \max\{\mu_j \mid j \in [k]\}$;

Bestimme $x^* \in P_k^{j^*}$ mit $c^T x^* = \mu_{j^*}$;

if $x^* \in \mathbb{Z}^n$ **then return** x^*;

Bestimme $i \in [n]$ mit $x_i^* \notin \mathbb{Z}$;

$P_{k+1}^j \leftarrow P_k^j$ für $j \in [k] \setminus \{j^*\}$;

$P_{k+1}^{j^*} \leftarrow \{x \in P_k^{j^*} \mid x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor\}$;

$P_{k+1}^{k+1} \leftarrow \{x \in P_k^{j^*} \mid x_i \geq \lceil x_i^* \rceil\}$;

$k \leftarrow k + 1$;

until $0 \neq 1$;

end

Algorithm 7: Branch-and-Bound Methode nach Dakin

©2013 Institut für Optimierung und Operations Research, Universität Ulm, Dr. Jens Maßberg

$$
\begin{aligned}
\max \quad c^T x = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 & \\
x &\in P \\
x &\in \mathbb{Z}^3
\end{aligned}
$$

mit P definiert als

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\leq 8 \\
5x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\leq 7 \\
6x_1 + x_2 + x_3 &\leq 12 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

$P_1^1 = P$			
$x^* = \left(0, \frac{11}{12}, \frac{5}{6}\right)$	$c^T x^* = \frac{95}{12}$	$j^* = 1$	$i = 2$

©2013 Institut für Optimierung und Operations Research, Universität Ulm, Dr. Jens Maßberg

$P_1^1 = P$			
$x^* = \left(0, \frac{11}{12}, \frac{5}{6}\right)$	$c^T x^* = \frac{95}{12}$	$j^* = 1$	$i = 2$
$P_2^1 = \{x \in P \mid x_2 \leq 0\}$			
$x^* = \left(0, 0, \frac{7}{4}\right)$	$c^T x^* = 7$		
$P_2^2 = \{x \in P \mid x_2 \geq 1\}$			
$x^* = \left(\frac{1}{7}, 1, \frac{4}{7}\right)$	$c^T x^* = \frac{54}{7}$	$j^* = 2$	$i = 1$

©2013 Institut für Optimierung und Operations Research, Universität Ulm, Dr. Jens Maßberg

$P_2^1 = \{x \in P \mid x_2 \leq 0\}$			
$x^* = \left(0, 0, \frac{7}{4}\right)$	$c^T x^* = 7$		
$P_2^2 = \{x \in P \mid x_2 \geq 1\}$			
$x^* = \left(\frac{1}{7}, 1, \frac{4}{7}\right)$	$c^T x^* = \frac{54}{7}$	$j^* = 2$	$i = 1$
$P_3^1 = P_2^1$			
$x^* = \left(0, 0, \frac{7}{4}\right)$	$c^T x^* = 7$		
$P_3^2 = \{x \in P \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 1\}$			
$x^* = \left(0, 1, \frac{1}{3}\right)$	$c^T x^* = \frac{23}{3}$	$j^* = 2$	$i = 3$
$P_3^3 = \{x \in P \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\}$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		

©2013 Institut für Optimierung und Operations Research, Universität Ulm, Dr. Jens Maßberg

$P_3^1 = P_2^1$			
$x^* = \left(0, 0, \frac{7}{4}\right)$	$c^T x^* = 7$		
$P_3^2 = \{x \in P \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 1\}$			
$x^* = \left(0, 1, \frac{1}{3}\right)$	$c^T x^* = \frac{23}{3}$	$j^* = 2$	$i = 3$
$P_3^3 = \{x \in P \mid x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\}$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		

$P_4^1 = P_2^1$			
$x^* = \left(0, 0, \frac{7}{4}\right)$	$c^T x^* = 7$	$j^* = 1$	$i = 3$
$P_4^2 = \{x \in P \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 1, x_3 \leq 0\}$			
$x^* = \left(0, \frac{4}{3}, 0\right)$	$c^T x^* = \frac{20}{3}$		
$P_4^3 = P_3^3$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_4^4 = \{x \in P \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 1, x_3 \geq 1\}$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		

©2013 Institut für Optimierung und Operations Research, Universität Ulm, Dr. Jens Maßberg

$P_5^1 = \{x \in P \mid x_2 \leq 0, x_3 \leq 1\}$			
$x^* = \left(\frac{3}{5}, 0, 1\right)$	$c^T x^* = \frac{29}{5}$		
$P_5^2 = P_4^2$			
$x^* = \left(0, \frac{4}{3}, 0\right)$	$c^T x^* = \frac{20}{3}$	$j^* = 2$	$i = 2$
$P_5^3 = P_4^3$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_5^4 = P_4^4$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_5^5 = \{x \in P \mid x_2 \leq 0, x_3 \geq 2\}$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		

©2013 Institut für Optimierung und Operations Research, Universität Ulm, Dr. Jens Maßberg

$P_6^1 = P_5^1$			
$x^* = \left(\frac{3}{5}, 0, 1\right)$	$c^T x^* = \frac{29}{5}$	$j^* = 1$	$i = 1$
$P_6^2 = \{x \in P \mid x_1 \leq 0, x_2 = 1, x_3 \leq 0\}$			
$x^* = (0, 1, 0)$	$c^T x^* = 5$		
$P_6^3 = P_5^3$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_6^4 = P_5^4$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_6^5 = P_5^5$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_6^6 = \{x \in P \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 2, x_3 \leq 0\}$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		

©2013 Institut für Optimierung und Operations Research, Universität Ulm, Dr. Jens Maßberg

$P_7^1 = \{x \in P \mid x_1 \leq 0, x_2 \leq 0, x_3 \leq 1\}$			
$x^* = (0,0,1)$	$c^T x^* = 4$		
$P_7^2 = P_6^2$			
$x^* = (0,1,0)$	$c^T x^* = 5$	$j^* = 2$	
$P_7^3 = P_6^3$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_7^4 = P_6^4$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_7^5 = P_6^5$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_7^6 = P_6^6$			
x^*	$c^T x^* = -\infty$		
$P_7^7 = \{x \in P \mid x_1 \geq 1, x_2 \leq 0, x_3 \leq 1\}$			
$x^* = \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$	$c^T x^* = 5$		

©2013 Institut für Optimierung und Operations Research, Universität Ulm, Dr. Jens Maßberg