Dr. Jens Maßberg
Dr. Chistian Löwenstein

Institut für Optimierung und Operations Research
Sommersemester 2013

Optimierung / OR I

Übungsblatt 10

Aufgabe 1: Sei G ein Graph. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) G besitzt genau dann einen Kreis der Länge höchstens $l+k$, wenn zwei Knoten u und v existieren, für die G zwei verschiedene Wege P und Q der Längen höchstens l und k zwischen u und v besitzt.

(ii) Enthält G einen Kreis, so gilt $g(G) \leq 2\mathrm{diam}(G) + 1$.

(10 Punkte)

Aufgabe 2: Beschreiben Sie per Angabe des Pseudocodes einen Algorithmus mit folgender Eingabe und Ausgabe.

Input: Ein Digraph D mit $\delta^-(D) > 0$.
Output: Ein gerichteter Kreis C in D.

Begründen Sie die Korrektheit des Algorithmus und schätzen Sie die Laufzeit ab. (Ihr Pseudocode ist "syntaktisch korrekt", wenn der im Wesentlichen dem entspricht, was `Latex` unter Verwendung von `algorithm2e.sty` produziert.)

(10 Punkte)

Aufgabe 3: Sei G ein zusammenhängender Graph. Beweisen Sie, dass ein Knoten $v \in V(G)$ existiert, so dass $G - v$ zusammenhängend ist.
($G - v$ ist der Graph mit Knotenmenge $V(G) \setminus \{v\}$ und Kantenmenge $E(G) \setminus \{\{v, w\} | \exists w \in V(G) : \{v, w\} \in E(G)\}$.)

(10 Punkte)

→ b.w.

Zusatzaufgabe: Formulieren Sie die folgende Aussage als mathematischen Satz auf Graphen und beweisen Sie ihn:
Auf einer Party gibt es immer mindestens zwei Personen, die die gleiche Anzahl an Gästen kennen.
(Zwei Personen kennen sich gegenseitig oder kennen sich nicht)

(10 Bonuspunkte)

Abgabetermin: 3.Juli, vor der Übung (14.15 Uhr).

Definition 8.5. *Sei G ein Graph.*

(i) *Ein Weg in G zwischen u_0 und u_l der Länge $l \in \mathbb{N}_0$ ist ein Teilgraph P von G mit*

$$V(P) = \{u_0, \ldots, u_l\} \text{ und } E(P) = \{u_{i-1}u_i \mid 1 \leq i \leq l\}.$$

Schreibweise: $P : u_0u_1 \ldots u_l$.

(ii) *G ist zusammenhängend, falls zwischen je zwei Knoten von G ein Weg in G existiert. Eine Komponente von G ist ein maximaler zusammenhängender Teilgraph von G.*

(iii) *Für $u, v \in V(G)$ ist der Abstand $\operatorname{dist}_G(u, v)$ in G zwischen u und v gleich der minimalen Länge eines Weges in G zwischen u und v. Der maximale Abstand zweier Knoten in G ist der Durchmesser $\operatorname{diam}(G)$ von G.*

(iv) *Ein Kreis in G der Länge $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq 3$ ist ein Teilgraph C von G mit*

$$V(C) = \{u_1, \ldots, u_l\} \text{ und } E(C) = \{u_{i-1}u_i \mid 2 \leq i \leq l\} \cup \{u_1u_l\}.$$

Schreibweise: $C : u_1u_2 \ldots u_lu_1$.

(v) *Die minimale/maximale Länge eines Kreises in G ist die Taillenweite/der Umfang $g(G)/c(G)$ von G.*

Definition 8.15. *Sei D ein Digraph.*

(i) *Ein gerichteter Weg in D von u_0 nach u_l der Länge $l \in \mathbb{N}_0$ ist ein Teildigraph P von D mit $V(P) = \{u_0, \ldots, u_l\}$ und $A(P) = \{(u_{i-1}, u_i) \mid 1 \leq i \leq l\}$. Schreibweise: $P : u_0u_1 \ldots u_l$.*

Ein ungerichteter Weg in D von u_0 nach u_l der Länge $l \in \mathbb{N}_0$ ist ein Teildigraph P von D mit $l+1$ verschiedenen Knoten $u_0, \ldots, u_l$ und l verschiedenen gerichtete Kanten $e_0, \ldots, e_{l-1}$ mit $e_i \in \{(v_i, v_{i+1}), (v_{i+1}, v_i)\}$ für $0 \leq i \leq l-1$.

(ii) *D ist stark zusammenhängend, falls für alle $(u, v) \in V(D)^2$ ein gerichteter Weg in D von u nach v existiert. Die maximalen stark zusammenhängenden Teildigraphen von D sind die starken Zusammenhangskomponenten von D.*

(iii) *Ist D ein Digraph, so ist der D unterliegende (ungerichtete) Graph der Graph G mit $V(G) = V(D)$ und*

$$E(G) = \left\{ uv \in \binom{V(G)}{2} \mid (u, v) \in A(D) \text{ oder } (v, u) \in A(D) \right\}.$$

D ist schwach zusammenhängend, falls G zusammenhängend ist. Die maximalen schwach zusammenhängenden Teildigraphen von D sind die schwachen Zusammenhangskomponenten von D.

(iv) *Ein gerichteter Kreis in D der Länge $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq 2$ ist ein Teildigraph C von D mit $V(C) = \{u_1, \ldots, u_l\}$ und $E(C) = \{(u_{i-1}, u_i) \mid 2 \leq i \leq l\} \cup \{(u_l, u_1)\}$. Schreibweise: $C : u_1 u_2 \ldots u_l u_1$.*

Ein ungerichteter Kreis in D der Länge $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq 2$ ist ein Teildigraph C von D mit l verschiedenen Knoten $u_1, \ldots, u_l$ und l verschiedenen gerichtete Kanten $e_1, \ldots, e_l$ mit $e_i \in \{(v_i, v_{i+1}), (v_{i+1}, v_i)\}$ für $1 \leq i \leq l - 1$ und $e_l \in \{(v_l, v_1), (v_1, v_l)\}$.