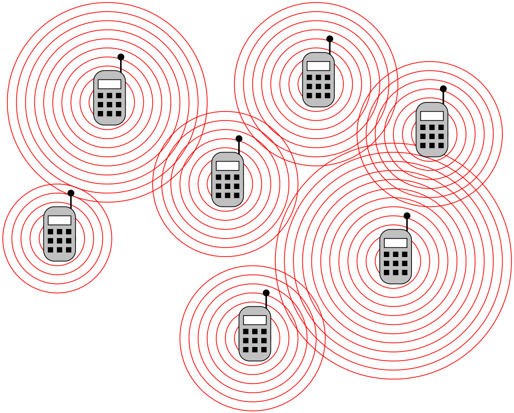
Coloration des graphes de disques unités

Henning Bruhn

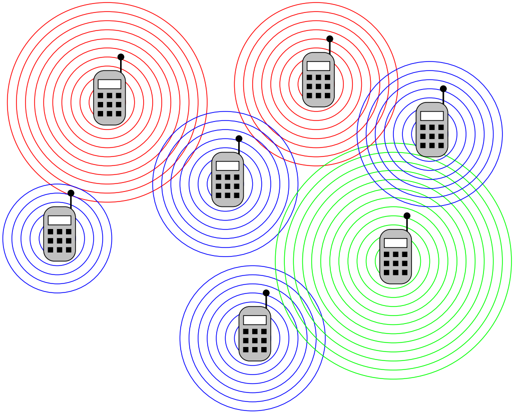
Équipe Combinatoire et Optimisation
Université Pierre et Marie Curie

Allocation des fréquences



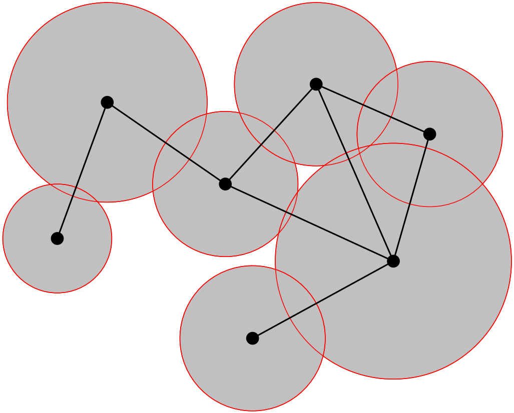
- communication avec des antennes relai
- proximité $\rightarrow$ interférence
- fréquences différentes pour éviter interférence

Allocation des fréquences



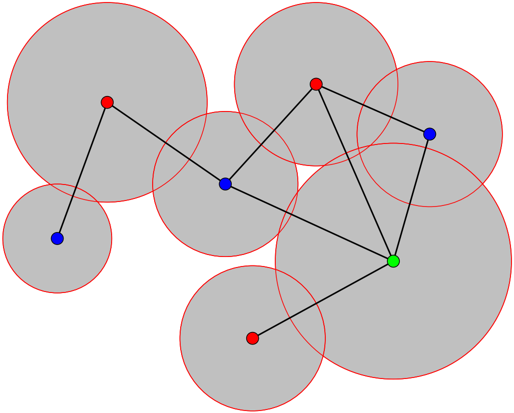
- communication avec des antennes relai
- proximité → interférence
- fréquences différentes pour éviter interférence

Allocation des fréquences



- communication avec des antennes relai
- proximité $\rightarrow$ interférence
- fréquences différentes pour éviter interférence

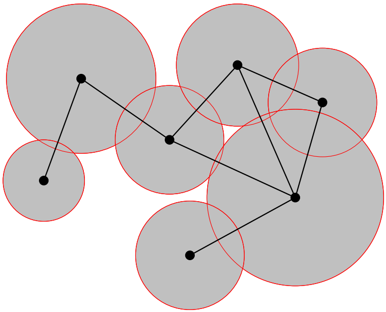
Allocation des fréquences



- communication avec des antennes relai
- proximité $\rightarrow$ interférence
- fréquences différentes pour éviter interférence

$\rightarrow$ coloration du graphe

Modèles



DEF Graphe de disques

- graphes d'intersection des disques

DEF Graphe de disques d'unité GDU

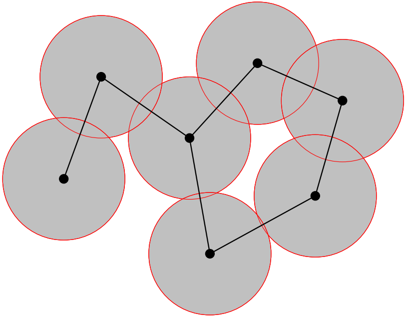
- graphes d'intersection des disques d'unité

ou

- deux points adjacent si distance ≤ 2

$\rightarrow$ coloration des GDU

Modèles



DEF Graphe de disques

- graphes d'intersection des disques

DEF Graphe de disques d'unité GDU

- graphes d'intersection des disques d'unité

ou

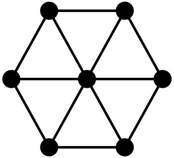
- deux points adjacent si distance ≤ 2

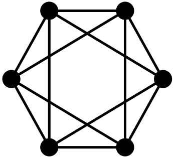
$\rightarrow$ coloration des GDU

Quelques GDU

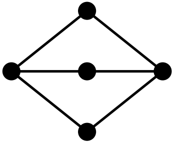
Des GDU...

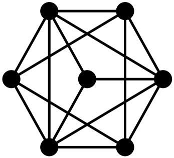
- cliques de n'importe quelle taille





Pas des GDU...





Aspects algorithmiques

Rapport avec les graphes planaires

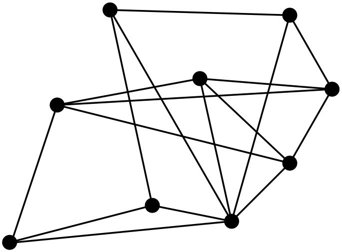
	MAX CLIQUE	MAX STABLE	3-COLORATION
GDU	**P**	**NPC**	**NPC**
planaire	**P**	**NPC**	**NPC**

	COUVERTURE DE SOMMET	séparateur	MAX COUPE
GDU	**NPC**	géométrique	**NPC**
planaire	**NPC**	Lipton & Tarjan	**P**

- rapport aussi pour PTAS
- Algorithme 3-approché pour coloration [Marathe et al '95]

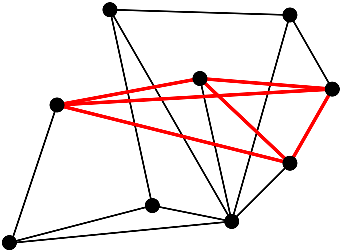
Clique et coloration

- $\chi(G)$: nombre chromatique
- $\omega(G)$: taille de la plus grande clique
- $\alpha(G)$: taille du plus grand stable
- toujours : $\chi(G) \geq \omega(G)$
- mais $\chi(G)$ n'est pas borné par aucune fonction de $\omega(G)$



Clique et coloration

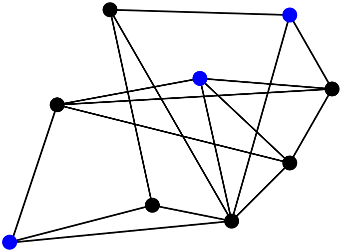
- $\chi(G)$: nombre chromatique
- $\omega(G)$: taille de la plus grande clique
- $\alpha(G)$: taille du plus grand stable
- toujours : $\chi(G) \geq \omega(G)$
- mais $\chi(G)$ n'est pas borné par aucune fonction de $\omega(G)$



$\omega = 4$

Clique et coloration

- $\chi(G)$: nombre chromatique
- $\omega(G)$: taille de la plus grande clique
- $\alpha(G)$: taille du plus grand stable
- toujours : $\chi(G) \geq \omega(G)$
- mais $\chi(G)$ n'est pas borné par aucune fonction de $\omega(G)$

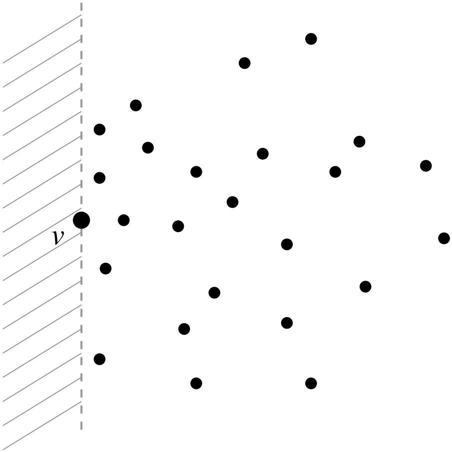


$\alpha = 3$

Borne de Peeters

Théorème (Peeters '91)

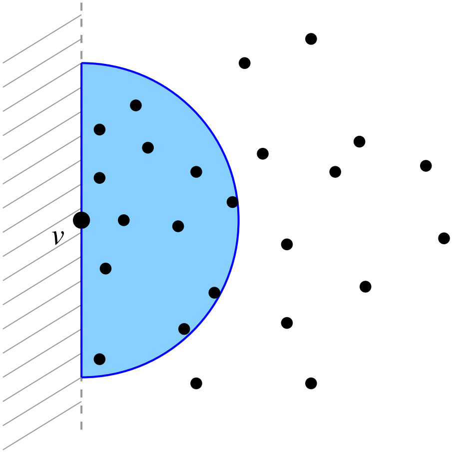
$\chi(G) \leq 3\omega(G) - 2$ *pour tout* GDU G



Borne de Peeters

Théorème (Peeters '91)

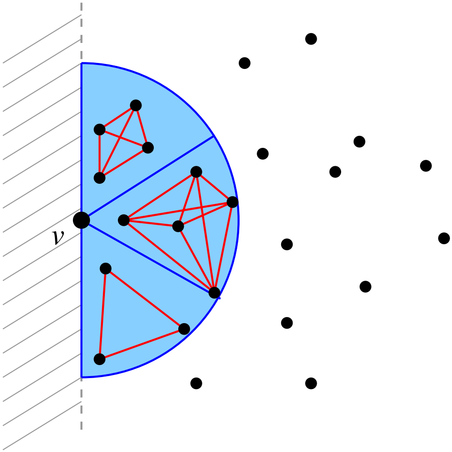
$\chi(G) \leq 3\omega(G) - 2$ *pour tout* GDU G



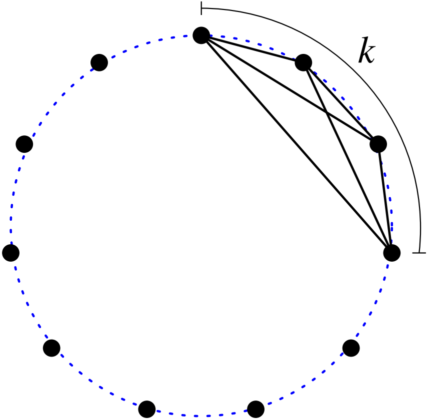
Borne de Peeters

Théorème (Peeters '91)

$\chi(G) \leq 3\omega(G) - 2$ *pour tout* GDU G



Une bonne borne ?



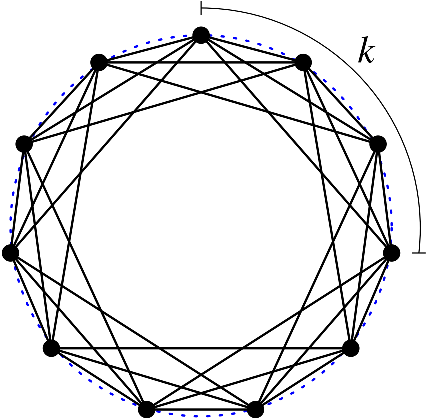
$k = 4$

- $3k - 1$ sommets
- $\omega = k$
- $\alpha = 2$

$$\Rightarrow \chi \geq \frac{|V|}{\alpha} = \frac{3}{2}\omega - \frac{1}{2}$$

[Malesińska, Piskorz & Weißenfels '98]

Une bonne borne ?



$k = 4$

- $3k - 1$ sommets
- $\omega = k$
- $\alpha = 2$

$$\Rightarrow \chi \geq \frac{|V|}{\alpha} = \frac{3}{2}\omega - \frac{1}{2}$$

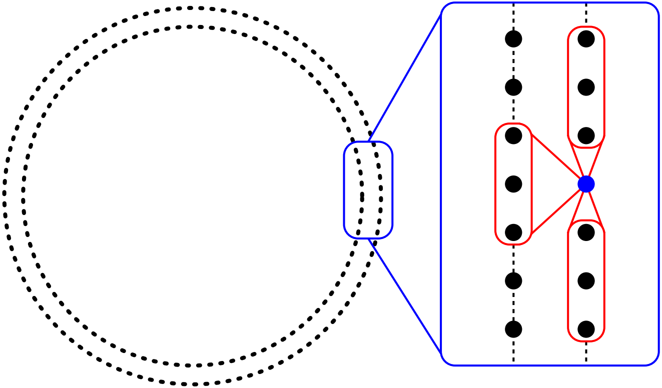
[Malesińska, Piskorz & Weißenfels ’98]

Écart

Soit c minimal tel que
$\chi(G) \leq c\,\omega(G)$ pour tout GDU G

$\rightarrow$ $\boxed{\frac{3}{2} \leq c \leq 3}$

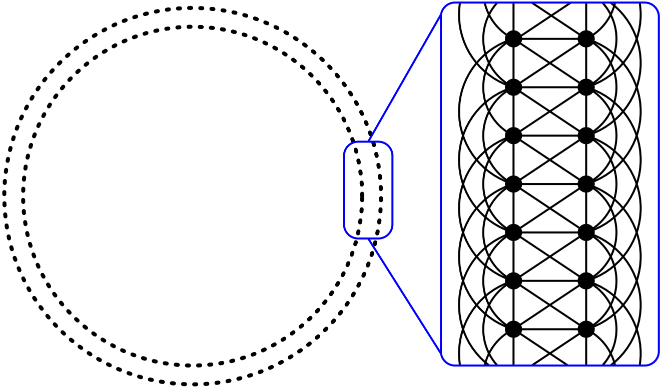
Améliorer Peeters ?



- $\deg(v) = 3\omega - 3$ partout

[Malesińska, Piskorz & Weißenfels '98]

Améliorer Peeters ?



- $\deg(v) = 3\omega - 3$ partout

[Malesińska, Piskorz & Weißenfels '98]

Meilleure borne plus proche de $\frac{3}{2}\omega$ ou de 3ω ?

$\frac{3}{2}\omega$ suffit pour...

- GDU sans triangle
- certain augmentations du treillis triangulair [McDiarmid & Reed ’00]

En plus

- $\chi_f(G) \leq 2.2\,\omega(G)$ pour tout GDU G [Gercke & McDiarmid ’01]

Conjecture

$\chi(G) \leq 2\,\omega(G)$ *pour tout* GDU G.

Meilleure borne plus proche de $\frac{3}{2}\omega$ ou de 3ω ?

$\frac{3}{2}\omega$ suffit pour...

- GDU sans triangle
- certain augmentations du treillis triangulair [McDiarmid & Reed '00]

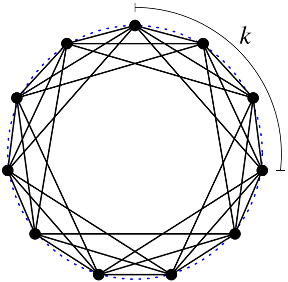
En plus

- $\chi_f(G) \leq 2.2\,\omega(G)$ pour tout GDU G [Gercke & McDiarmid '01]

Conjecture

$\chi(G) \leq \frac{3}{2}\,\omega(G)$ *pour tout* GDU G.

Résultat principal



Exemple de la borne inf

- $\alpha = 2$
- $\chi \geq \frac{3}{2}\omega$

Théorème (B '11)

Soit G GDU avec $\alpha(G) \leq 2$. Alors $\chi(G) \leq \frac{3}{2}\omega(G)$.

- Il existe G de $\alpha = 2$ et $\chi \geq \frac{|V|}{2}$ mais $\omega = O(\sqrt{|V| \log |V|})$

Coloration et couplages

Si $\alpha = 2$...

- Coloration $\rightarrow$ couplage de $\overline{G}$ plus singletons

décomposition de Edmonds-Gallai

$$\Downarrow$$

Lemme

Soit G un GDU *et soit V l'union des trois cliques A, B, C telles que $A \cap B \neq \emptyset$. Alors $\chi(G) \leq \frac{3}{2}\omega(G)$.*

Donc il reste à prouver...

Lemme

Si G est un GDU *de $\alpha \leq 2$, alors V est l'union des trois cliques A, B, C telles que $A \cap B \neq \emptyset$.*

χ et $\overline{\chi}$

Théorème

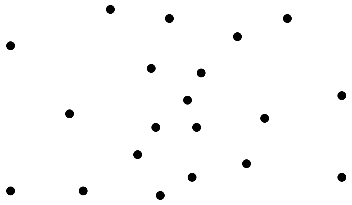
Soit $\ell \geq 2$ pair. Si $\chi(\overline{G}) \leq \ell$, alors $\chi(G) \leq \frac{\ell}{2}\omega(G)$.

- (Presque) meilleure borne pour $\ell = 2, 4$
- Connu ?
- Toujours vrai pour $\ell \geq 3$ impair ?

But

Lemme

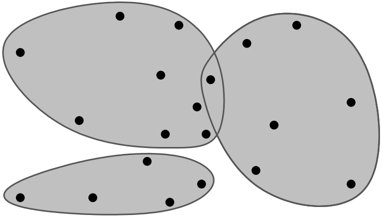
Si G est un GDU de $\alpha \leq 2$, alors V est l'union des trois cliques A, B, C telles que $A \cap B \neq \emptyset$.



But

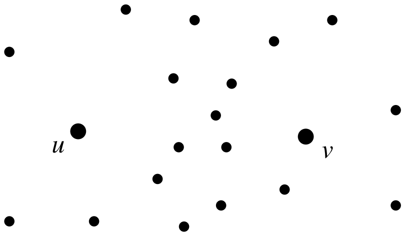
Lemme

Si G est un GDU *de $\alpha \leq 2$, alors V est l'union des trois cliques A, B, C telles que $A \cap B \neq \emptyset$.*



Approche géométrique

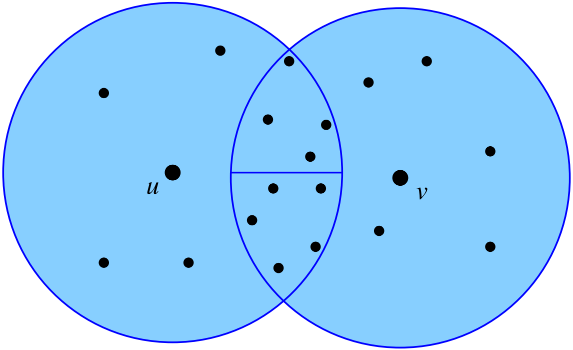
G GDU $\alpha = 2$ et $uv \notin E$



- V union des quatre cliques
- si $\text{dist}(u, v) \geq 2\sqrt{3}$ $\Rightarrow N(u) \cap N(v)$ une clique

Approche géométrique

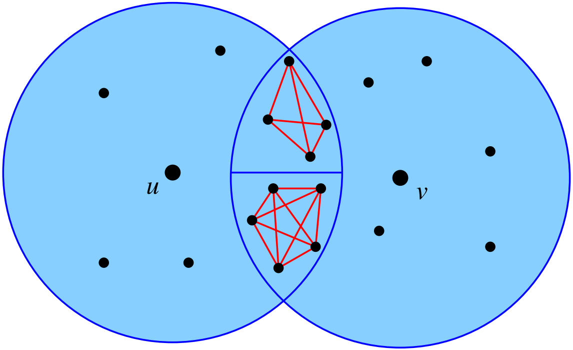
G GDU $\alpha = 2$ et $uv \notin E$



- V union des quatre cliques
- si $\mathrm{dist}(u, v) \geq 2\sqrt{3}$ $\Rightarrow N(u) \cap N(v)$ une clique

Approche géométrique

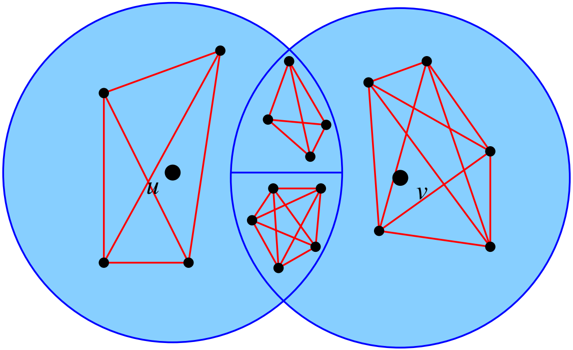
G GDU $\alpha = 2$ et $uv \notin E$



- V union des quatre cliques
- si $\text{dist}(u, v) \geq 2\sqrt{3}$ $\Rightarrow N(u) \cap N(v)$ une clique

Approche géométrique

G GDU $\alpha = 2$ et $uv \notin E$



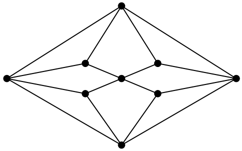
- V union des quatre cliques
- si $\mathrm{dist}(u, v) \geq 2\sqrt{3}$ $\Rightarrow N(u) \cap N(v)$ une clique

$\rightarrow$ non-linéarité

Approche combinatoire ?

Deux façons de voir les graphes planaires :

Vue géométrique



Vue combinatoire

G planaire $\leftrightarrow$ ni K_5 ni $K_{3,3}$ comme mineur

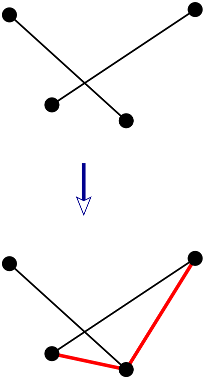
Par contre :

- NP-dur : Décider si G est GDU

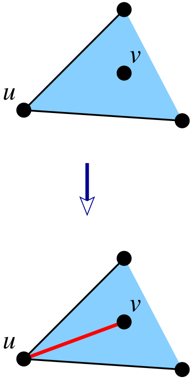
Approche mixte

$V \subseteq \mathbb{R}^2$ mais...

au lieu de calculer des distances :

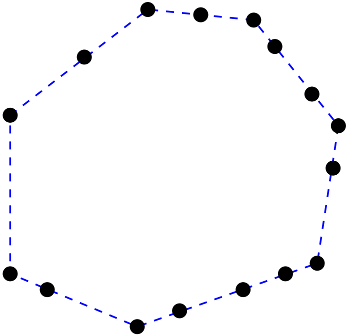


Principe des arêtes croisantes



Principe de convexité

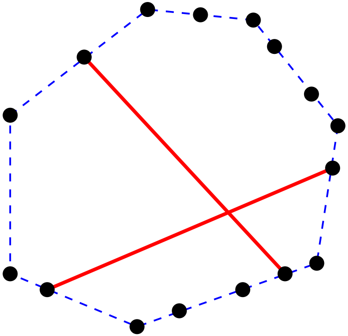
GDU creux



DEF GDU G creux si aucun sommet dans l'intérieur de conv(G)

Facile : principe des arêtes croisantes
$\Rightarrow$ trois cliques

GDU creux

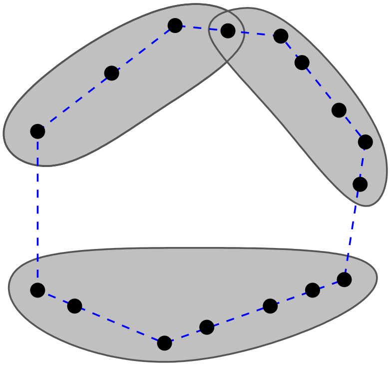


DEF GDU G creux si aucun sommet dans l'intérieur de conv(G)

Facile : principe des arêtes croisantes

$\Rightarrow$ trois cliques

GDU creux



DEF GDU G creux si aucun sommet dans l'intérieur de conv(G)

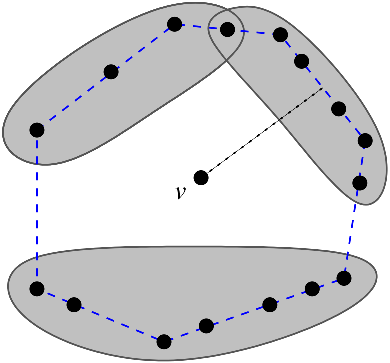
Facile : principe des arêtes croisantes

$\Rightarrow$ trois cliques

GDU solide

idée

- l’extérieur détermine l’intérieur
- exploiter principe de convexité

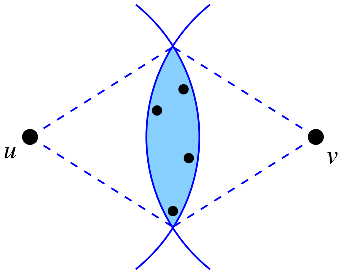


- ne marche pas si distance *v*–extérieur grande

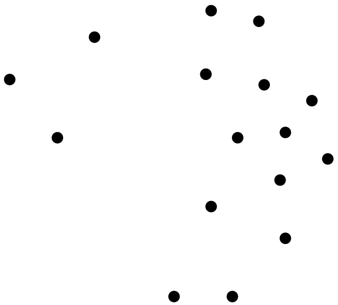
Deux cas

Soit G GDU. Alors...

Soit ils existent u, v de distance $\geq 2\sqrt{3}$



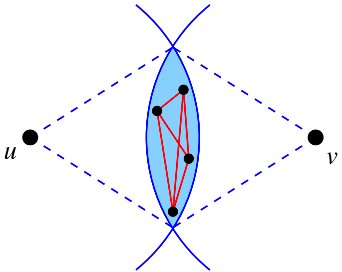
Soit $G \subseteq$ disque de rayon 2



Deux cas

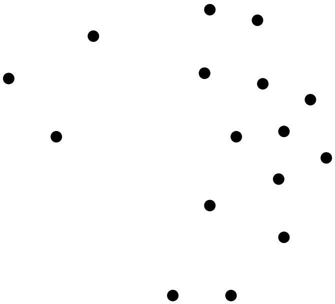
Soit G GDU. Alors...

Soit ils existent u, v de distance $\geq 2\sqrt{3}$



$\rightarrow$ gagné

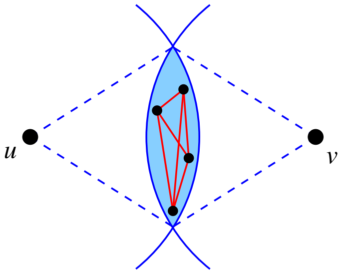
Soit $G \subseteq$ disque de rayon 2



Deux cas

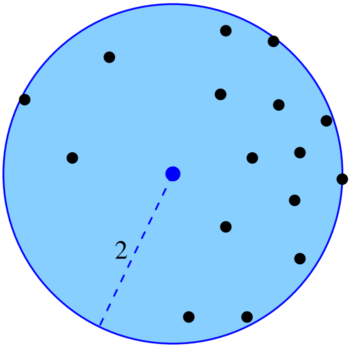
Soit G GDU. Alors...

Soit ils existent u, v de distance $\geq 2\sqrt{3}$

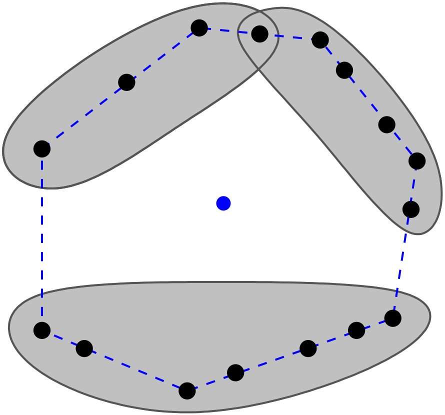


$\rightarrow$ gagné

Soit $G \subseteq$ disque de rayon 2



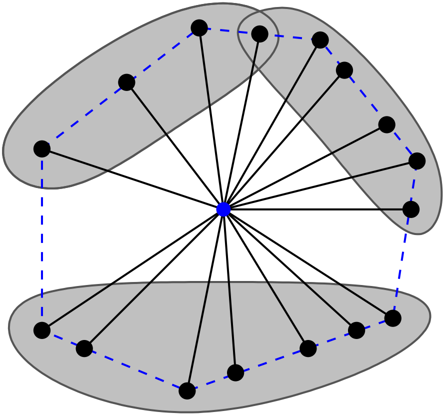
Fin de la preuve



G pas creux

- trois cliques à l'extérieur
- sommet universel

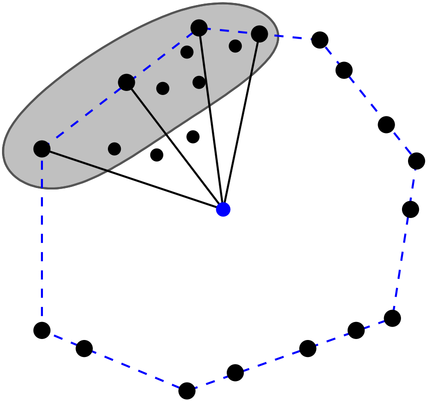
Fin de la preuve



G pas creux

- trois cliques à l’extérieur
- sommet universel

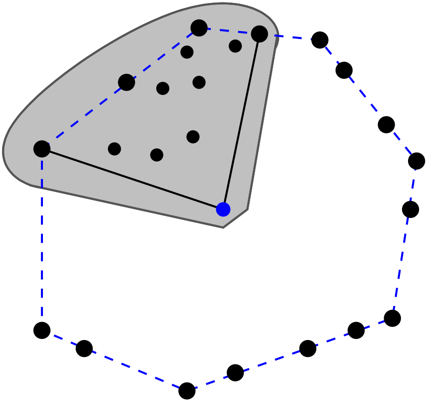
Fin de la preuve



G pas creux

- trois cliques à l'extérieur
- sommet universel

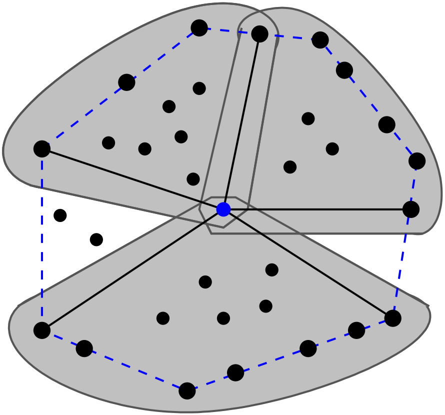
Fin de la preuve



G pas creux

- trois cliques à l'extérieur
- sommet universel
- cliques extérieures étendent à l'intérieur

Fin de la preuve



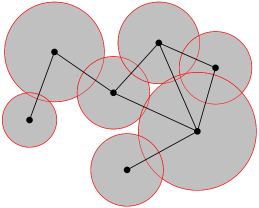
G pas creux

- trois cliques à l'extérieur
- sommet universel
- cliques extérieures étendent à l'intérieur

→ il reste á contrôler deux zones

Questions ouvertes

- $\chi(G) \leq \frac{3}{2}\omega(G)$ pour tout GDU G ?
- meilleur algorithme ?
- graphes de disques ?



- $\chi(G) \leq 6\,\omega(G)$ pour tout graphe de disques
- $\chi \geq \frac{3}{2}\omega$ pour l'exemple de Malesińska et al

Merci beaucoup !