Probeklausur (keine Abgabe)

Aufgabe 1
Sei $\mathcal{C}$ der $(4,2)$-Code über $\mathbb{F}_3$ mit Prüfmatrix

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Syndrome und Nebenklassenführer von $\mathcal{C}$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ ein perfekter Code ist.

c) Wir haben das Wort $(1,2,1,2)$ empfangen. Welches Wort wurde gesendet?

(5+5+5 = **15 P**)

Aufgabe 2
Sei $f(x) = x^6 + x^3 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass f irreduzibel ist.

a) Zeigen Sie, dass $f(x)$ in $\mathbb{F}_{2^6}$ eine Nullstelle α besitzt und zeigen Sie weiter, dass $\mathrm{ord}(\alpha) = 9$ gilt. Begründen Sie beides sorgfältig!

b) Faktorisieren Sie $f(x)$ in $\mathbb{F}_{2^6}[x]$ in Linearfaktoren.

c) Sei $\mathcal{C}$ der zyklische Code über $\mathbb{F}_2$ mit Erzeugerpolynom $f(x)$. Bestimmen Sie $d_{\min}(\mathcal{C})$.

(5+5+5 = **15 P**)

Aufgabe 3
Gegeben sei ein (n_1, k, d_1)-Code $\mathcal{C}_1$ und ein (n_2, k, d_2)-Code $\mathcal{C}_2$ über $\mathbb{F}_q$ mit Erzeugermatrix G_1 bzw. G_2. Wir betrachten einen weiteren Code $\mathcal{C}$ mit Erzeugermatrix

$$G = (G_1 \mid G_2).$$

a) Bestimmen Sie die Länge n und die Dimension k von $\mathcal{C}$.

b) Zeigen Sie, dass $d_{\min}(\mathcal{C}) \geq d_1 + d_2$.

(5+5 = **10 P**)

Bitte wenden!

Aufgabe 4

Sei $\beta = 2 \in \mathbb{F}_{13}$. Sie dürfen benutzen, dass $\operatorname{ord}(\beta) = 12$. Sei weiter $\mathcal{C}$ der zyklische $RS^{12,8}(\beta)$-Code.

a) Wir haben das Wort $r = (3, 0, 0, 7, 11, 6, 1, 10, 5, 8, 9, 3)$ empfangen. Benutzen Sie den erweiterten euklidischen Algorithmus um das Fehlerstellenpolynom Λ_r zu berechnen.

   Hinweis: Für die Potenzen β^i und die Funktionswerte $r(\beta^i)$ gilt:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
β^i	1	2	4	8	3	6	12	11	9	5	10	7
$r(\beta^i)$	11	4	2	0	1	12	8	11	6	5	9	6

b) Wir nehmen nun an, dass ein weiteres Wort s mit $s \neq r$ empfangen wurde. Das Fehlerstellenpolynom von s lautet $\Lambda_s(x) = x^2 + 6x - 1$, das Fehlerauswertungspolynom $R_s(x) = -2x + 2$. Berechnen Sie die Fehlerwerte mit Hilfe der Forney-Formel und schließen Sie auf das gesendete Codewort.

(5+5 = **10 P**)

Aufgabe 5

a) Zeigen Sie, dass genau ein zyklischer $(8, 4)$-Code $\mathcal{C}$ über $\mathbb{F}_2$ existiert.

b) Bestimmen Sie das Erzeugerpolynom $g(x)$ von $\mathcal{C}$ und zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ selbstdual ist.

(5+5 = **10 P**)