Geometrie: Blatt 9

Stefan Wewers
Michael Eskin
Abgabe: 30.6., vor der Übung

Aufgabe 1: (6+6 Punkte) Sei $(\mathbb{H}, \mathcal{G}, \mathcal{Z}, \cong, \simeq)$ eine hyperbolische Ebene.

(a) Es sei $ABCD$ ein Viereck (d.h. A, B, C, D sind vier paarweise verschiedene Punkte, von denen keine drei kollinear sind, so angeordnet dass sich die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ schneiden.) Wir bezeichnen mit $\angle A$, $\angle B$, etc. die vier Innenwinkel (also gilt z.B. $\angle A = \angle DAB$). Zeigen Sie: falls die Winkel $\angle A$ und $\angle B$ rechte Winkel sind und $AD \cong BC$ gilt, so gilt $\angle D \simeq \angle C$. (Hinweis: zeigen Sie mit Hilfe des SWS-Kriteriums die Kongruenz diverser Dreiecke.)

(b) Es seinen g, l zwei parallele Geraden. Für einen Punkt $A \in g$ definieren wir den *Abstand von A nach l* als die Länge der Strecke AA', wobei $A' \in l$ das Lot von A auf l ist. Zeigen Sie: es gibt höchsten zwei verschiedene Punkte auf g, die denselben Abstand zu l haben. (Hinweis: nehmen Sie an, dass es drei verschiedene Punkte $A, B, C \in g$ gibt, die denselben Abstand zu l haben. Verwenden Sie (a) und leiten Sie einen Widerspruch zu Satz 4.4 (ii) im Skript (es gibt kein Rechteck) her.)

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Seien $\phi_1, \phi_2 \in M(\hat{\mathbb{C}})$ die Möbius-Transformationen

$$\phi_1(z) := \frac{1}{z-1}, \qquad \phi_2(z) := \frac{iz - i}{z+1},$$

$i\mathbb{R}$ die imaginäre Achse und S^1 der Einheitskreis. Bestimmen Sie Gleichungen für die vier verallgemeierten Kreise

$$\phi_k(i\mathbb{R}), \quad \phi_k(S^1), \quad k = 1, 2.$$

Fertigen Sie eine Skizze an. (Hinweis: benuzen Sie, dass drei Punkte einen verallgemeinerten Kreis eindeutig festlegen.)

Aufgabe 3: (3+7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie Möbius-Transformationen $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in M(\hat{\mathbb{C}})$ mit

$$\phi_1 : \begin{cases} 1 \mapsto 1 \\ 0 \mapsto \infty \\ \infty \mapsto 0 \end{cases}, \qquad \phi_2 : \begin{cases} 1 \mapsto 0 \\ 0 \mapsto 1 \\ \infty \mapsto \infty \end{cases}, \qquad \phi_3 : \begin{cases} 1 \mapsto \infty \\ 0 \mapsto 1 \\ \infty \mapsto 0 \end{cases}.$$

(b) Es seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$ vier paarweise verschiedene Punkte und

$$\lambda := [z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

das Doppelverhältnis. Bestimmen Sie die Doppelverhältnisse $[z_2, z_1, z_4, z_3]$, $[z_1, z_2, z_4, z_3]$ und $[z_1, z_4, z_2, z_3]$ in Abhängigkeit von λ.

Hinweis: um $[z_1, z_4, z_2, z_3]$ zu bestimmen, benutzen Sie die Invarianz des Doppelverhältnisses unter Möbius-Transformationen, (a) und die Formel

$$\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4] = [\lambda, 1, 0, \infty].$$