Prof. Dr. Stefan Wewers
Christian Steck
Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 1

Algebraische Zahlentheorie

Die Besprechung erfolgt am Mittwoch, dem 23.10.2013,
um 14:00 Uhr in O28 - 2003.

Aufgabe 1 (*Euler hatte Unrecht*) (1+1+2+2+2+2)
Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] = \{a + b\sqrt{-3}\ ;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ und $\alpha, \beta \in R$.

(a) Zeigen Sie, dass α genau dann eine Einheit in R ist, wenn $N(\alpha) = 1$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass es kein $\alpha \in R$ mit $N(\alpha) = 2$ gibt.

(c) Zeigen Sie, dass $2 \in R$ irreduzibel ist.

(d) Zeigen Sie, dass der Ring R nicht faktoriell ist.

(e) An welcher Stelle scheitert der Beweis von Proposition 1.1.19, wenn man versucht ihn auf den Ring $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ anzuwenden?

(f) Machen Sie sich klar, dass die Aussagen (a)-(e) ganz analog auch für $R = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ gelten, wobei $d \leq -3$ eine ganze Zahl ist.

Aufgabe 2 (*Euler hatte doch Recht*) (1+1+1+2+2+1+2)
Seien $a, b, s \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen mit s ungerade, $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ und

$$s^3 = a^2 + 3b^2.$$

Wir möchten zeigen, dass es $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $s = u^2 + 3v^2$ gibt.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ein Unterring von $\mathbb{Z}[\omega]$ ist.

(b) Welche Bedingung muss man an $x, y \in \mathbb{Z}$ stellen, damit $x + y\omega \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ gilt?

(c) Finden Sie ein Element $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, mit $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = s^3$.

Man kann zeigen, dass $p = \sqrt{-3}$ (bis auf Assoziiertheit) das einzige Primelement in $\mathbb{Z}[\omega]$ ist, mit $p \sim \bar{p}$. Diese Aussage darf im Folgenden ohne Beweis verwendet werden.

(d) Zeigen Sie, dass $\sqrt{-3}$ kein Teiler von α ist.

(e) Zeigen Sie, dass α und $\bar{\alpha}$ teilerfremd sind.

(f) Zeigen Sie, dass α von der Form $\varepsilon \cdot \gamma^3$ ist, mit $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\omega]^\times$ und $\gamma \in \mathbb{Z}[\omega]$.

(g) Offenbar gilt nun $N(\gamma) = s$. Da wir in $\mathbb{Z}[\omega]$ faktorisiert haben, weiß man jedoch lediglich $\gamma \in \mathbb{Z}[\omega]$, d.h. es ist $\gamma = x + y\omega$ und somit $N(\gamma) = x^2 - xy + y^2 = s$. Man muss nun ein Element $\delta = u + v\sqrt{-3} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ finden, mit $N(\gamma) = N(\delta)$, denn dann gilt $s = N(\gamma) = N(\delta) = u^2 + 3v^2$. Wie findet man δ?

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (1+3)

Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}\ ;\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ und $\alpha, \beta \in R$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$N\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sqrt{5}] & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ a + b\sqrt{5} & \longmapsto & a^2 - 5b^2 \end{array}$$

die Relation $N(\alpha \cdot \beta) = N(\alpha) \cdot N(\beta)$ erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass 2 und $\pm 1 + \sqrt{5}$ in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ irreduzibel, aber nicht prim sind.

Hinweis: Orientieren Sie sich an Aufgabe 1, (a)-(d).

Aufgabe 4 (3+3)

(a) Berechnen Sie die Primzerlegungen von 14, $3 + 4\omega$ und $122 + 61\omega$ in $\mathbb{Z}[\omega]$.

(b) Berechnen Sie die Primzerlegungen von 14, $3 + 4i$ und $122 + 61i$ in $\mathbb{Z}[i]$.