



Übungsblatt 10

Algebraische Zahlentheorie

Die Besprechung erfolgt am Mittwoch, dem 15.01.2014,
um 14:00 Uhr in O28 - 2003.

Aufgabe 1 (5+5)

Sei p eine Primzahl und $k \geq 1$.

- (a) Berechnen Sie Φ_{p^k} .
- (b) Berechnen Sie Φ_{12} und Φ_{24} .

Aufgabe 2 (5+5)

In dieser Aufgabe bestimmen wir die Zwischenkörper von $\mathbb{Q}[\zeta_7]/\mathbb{Q}$.

- (a) Sei $\alpha := \zeta_7 + \zeta_7^6$. Zeigen Sie, dass $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ ein kubischer Zahlkörper ist und $K = \mathbb{Q}[\zeta_7] \cap \mathbb{R}$ gilt.

- (b) Finden Sie einen imaginär quadratischen Zahlkörper $L \subset \mathbb{Q}[\zeta_7]$.

Hinweis: Nach Galoistheorie gibt es ein Element $\beta = \sum_{k=1}^6 a_k \zeta_7^k$ mit

$$\sigma_j(\beta) = \begin{cases} \beta, & \text{falls } j \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}, \\ -\beta, & \text{falls } j \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}. \end{cases}$$

Finden Sie die passenden Koeffizienten a_k und berechnen Sie β^2 .

Aufgabe 3 (5)

Zeigen Sie, dass für Primzahlen $p \neq 3$ gilt:

$$\left(\frac{3}{p}\right) = 1 \iff p \equiv \pm 1 \pmod{12}$$

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis von Proposition 3.1.12.