Prof. Dr. Stefan Wewers
Christian Steck
Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 11

Algebraische Zahlentheorie

Die Besprechung erfolgt am Mittwoch, dem 22.01.2014,
um 14:00 Uhr in O28 - 2003.

Aufgabe 1 (5+5)

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für eine ungerade Primzahl p gilt: $\sqrt{p^*} \in \mathbb{Q}[\zeta_p]$, das heißt es ist $\mathbb{Q}[\sqrt{p^*}] \subset \mathbb{Q}[\zeta_p]$[1]. In dieser Aufgaben wollen wir zeigen, dass jeder quadratische Körper in einem zyklotomischen Körper enthalten ist. Bearbeiten Sie dazu die folgenden Teilaufgaben.

(a) Zeigen Sie $\sqrt{-1} \in \mathbb{Q}[\zeta_4]$ und $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\zeta_8]$.

(b) Zeigen Sie, dass es für $m \in \mathbb{Z}$ einen zyklotomischen Körper K gibt, mit $\mathbb{Q}[\sqrt{m}] \subset K$.

Hinweis: Bearbeiten Sie zunächst den Fall m quadratfrei und betrachten die Primzerlegung $m = p_1 \cdots p_n$.

Aufgabe 2 (3+2+5+5)

Wir betrachten die Gruppe $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ und die Gruppe $\widehat{G}$ der Dirichlet-Charaktere auf G.

(a) Bestimmen Sie für $n = 9$ alle Charaktere $\chi : G \to \mathbb{C}^*$ und finden Sie einen Erzeuger der Gruppe $\widehat{G}$.

(b) Welche der Charaktere aus Aufgabenteil (a) sind primitiv?

Zeigen Sie die folgenden Relationen:

(c) Ist $\chi \in \widehat{G}$ ein Dirichlet-Charakter, dann gilt:

$$\sum_{a \in G} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(n), & \text{falls } \chi \text{ trivial,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(d) Ist $a \in G$, dann gilt:

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(a) = \begin{cases} \varphi(n), & \text{falls } a = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3 (5)

Wir betrachten das Minimalpolynom f von $\zeta_7 + \zeta_7^{-1}$. Bestimmen Sie das Zerlegungsverhalten von $f \pmod p$ in Abhängigkeit von $p \pmod 7$.

[1] Dabei ist $p^* = \pm p \equiv 1 \pmod 4$.