ulm university universität uulm

Prof. Dr. Stefan Wewers
Christian Steck
Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 12

Algebraische Zahlentheorie

Die Besprechung erfolgt am Mittwoch, dem 29.01.2014,
um 14:00 Uhr in O28 - 2003.

Aufgabe 1 (5)

Sei p eine ungerade Primzahl und $\chi := \left(\frac{\cdot}{p}\right)$ der quadratische Charakter. Zeigen Sie:

$$g(\chi) = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \chi(x)\zeta_p^x = \sum_{x \in \mathbb{F}_p} \zeta_p^{x^2}.$$

Aufgabe 2 (5+5+5)

Sei $p \equiv 1 \pmod 4$ eine Primzahl und $\mathfrak{p} \mid p$ ein Primideal von $\mathbb{Z}[i]$, welches p teilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$, $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ gibt es ein eindeutiges $\zeta \in \mu_4$ mit

$$\alpha^{\frac{p-1}{4}} \equiv \zeta \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Wir setzen $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_4 := \zeta$.

(b) Für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ gilt:

$$\left(\frac{\alpha \cdot \beta}{\mathfrak{p}}\right)_4 = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_4 \cdot \left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right)_4$$

und es ist

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_4 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \beta \in \mathbb{Z}[i] : \; \beta^4 \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}}$$

(c) Ist $\chi(\cdot) = \left(\frac{\cdot}{\mathfrak{p}}\right)_4 : \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times$, so gilt:

$$g(\chi)^4 = pJ(\chi, \chi)^2.$$

Aufgabe 3 (5+5)

Sei $p \equiv 1 \pmod 3$ eine Primzahl und $N(x^3 + y^3 = 1) \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl der Lösungen $(x, y) \in \mathbb{F}_p^2$ der Gleichung $x^3 + y^3 = 1$. Wir wollen diese Anzahl nun genauer bestimmen.

(a) Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{F}_p$ gilt:

$$N(x^3 = a) = 1 + \chi(a) + \chi^2(a),$$

wobei $\chi : \mathbb{F}_p \to \mathbb{C}^\times$ ein kubischer Charakter ist.

(b) Zeigen Sie die Abschätzung

$$|N(x^3 + y^3 = 1) - p + 2| \leq 2\sqrt{p}.$$

Hinweis: Schreiben Sie $N(x^3 + y^3 = 1)$ unter Verwendung von Aufgabenteil (a) als Summe von Jacobi-Summen und benutzen Sie die Abschätzungen aus der Vorlesung.