Prof. Dr. Stefan Wewers
Christian Steck
Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 3

Algebraische Zahlentheorie

Die Besprechung erfolgt am Mittwoch, dem 6.11.2013,
um 14:00 Uhr in O28 - 2003.

Aufgabe 1 (3+3+4)

Sei $f = X^3 - 3X - 1$ und α eine Nullstelle von f. Zeigen Sie:

(a) f ist irreduzibel.

(b) $(2\alpha^2 - \alpha - 4)^2 = -3\alpha^2 + 12$.

(c) In $\mathbb{Q}(\alpha)$ zerfällt f bereits in Linearfaktoren.

Aufgabe 2 (2+2+2+2+2)

Wir betrachten einen Zahlkörper $K = \mathbb{Q}\,[x,\, y]$. Nach dem Satz vom primitiven Element ist K von der Form $\mathbb{Q}[\alpha]$. Dieses α wollen wir nun bestimmen.

(a) Bezeichnet man mit $\sigma_1, \ldots, \sigma_n : K \to \mathbb{C}$ die Einbettungen von K nach $\mathbb{C}$, so ist

$$P(X) = \prod_{i \neq j} \left(\sigma_i(y) - \sigma_j(y)\right) X + \sigma_i(x) - \sigma_j(x)$$

nicht das Nullpolynom.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $c \in \mathbb{Q}$ gibt, so dass die Elemente $\sigma_i(x+cy) \in \mathbb{C}$ alle verschieden sind.

(c) Zeigen Sie $\deg_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x + cy] \geq n$ und schließen Sie $K = \mathbb{Q}[x + cy]$.

Wir wollen obiges Verfahren nun explizit auf den Körper $K = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\, \sqrt[3]{3}\right]$ anwenden.

(d) Zeigen Sie $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2},\, \sqrt[3]{3}\right] = \mathbb{Q}\left[\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right]$.

Aufgabe 3 (3+4+3)

Wir betrachten $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

(a) Ist $\alpha = a + b\sqrt{-3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$, so ist $\phi_\alpha : x \mapsto \alpha x$ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $K \to K$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von ϕ_α bezüglich der Basis $(1, \sqrt{-3})$.

(c) Bestimmen Sie Determinante und Spur dieser Darstellungsmatrix.