Prof. Dr. Stefan Wewers
Christian Steck
Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 4

Algebraische Zahlentheorie

Die Besprechung erfolgt am Mittwoch, dem 13.11.2013,
um 14:00 Uhr in O28 - 2003.

Aufgabe 1 (4+4)

Sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad n und $K = \mathbb{Q}[\alpha]$ der Stammkörper. Zeigen Sie:

(a) $N_{K/\mathbb{Q}}(f'(\alpha)) = (-1)^{\binom{n}{2}}\Delta(f)$

(b) $N_{K/\mathbb{Q}}(1-\alpha) = f(1)$

Aufgabe 2 (2)

Sei K ein Zahlkörper und $\alpha \in K$. Zeigen Sie, dass es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $m \cdot \alpha$ ganzalgebraisch ist.

Aufgabe 3 (3+3+4+5*)

Sei $f = x^4 - x + 2$, $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f und $K = \mathbb{Q}[\alpha]$.

(a) Zeigen Sie: f ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.

(b) Bestimmen Sie ein Minimalpolynom von α^3.

(c) Bestimmen Sie $\Delta(f)$. *Hinweis*: Verwenden Sie Aufgabenteil (b) und Aufgabe 1.

(d*) Gilt $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$?

Aufgabe 4 (2+2+3+3)

Sei $D \in \mathbb{Z}$ quadratfrei, $K = \mathbb{Q}[\sqrt{D}]$ und $\alpha = a + b\sqrt{D}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ ein beliebiges Element aus K. Wir wollen zeigen, dass der Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$ von folgender Gestalt ist:

$$\mathcal{O}_K = \begin{cases} \mathbb{Z}\left[\sqrt{D}\right], & \text{falls } D \equiv 2,3 \pmod 4 \\ \mathbb{Z}\left[\dfrac{1+\sqrt{D}}{2}\right], & \text{falls } D \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: Die Zahl $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ ist ganz in $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$, aber die Zahl $\frac{1+\sqrt{-2}}{2}$ ist nicht ganz in $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$.

(b) Berechnen Sie das Minimalpolynom von α und zeigen Sie:

$$\alpha \in \mathcal{O}_K \quad \Leftrightarrow \quad 2a \in \mathbb{Z} \text{ und } a^2 - Db^2 \in \mathbb{Z}$$

(c) Sei nun $\alpha = a + b\sqrt{D} \in \mathcal{O}_K$. Zeigen Sie, dass die folgenden Elemente in $\mathbb{Z}$ liegen:

$$(2a)^2 - D(2b)^2,\ D(2b)^2,\ 2b.$$

(d) Zeigen Sie nun die oben beschriebene Darstellung für $\mathcal{O}_K$.