ulm university universität uulm

Prof. Dr. Stefan Wewers
Christian Steck
Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 7

Algebraische Zahlentheorie

Die Besprechung erfolgt am Mittwoch, dem 4.12.2013,
um 14:00 Uhr in O28 - 2003.

Aufgabe 1 (5+5)

Diese Aufgaben dienen als Hilfe für Aufgabe 2. Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(a) Sei $\mathfrak{a} = (\alpha)$ ein Hauptideal in R. Dann besitzt α die kleinste Norm aller Elemente in $\mathfrak{a}$.

(b) Sei $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal ungleich Null und $\alpha \neq 0$ ein Element in $\mathfrak{a}$ mit minimaler Norm r. Fasst man R als Unterring von $\mathbb{C}$ auf, so ist $\mathfrak{a}$ ein Gitter in $\mathbb{C}$. Seien ferner $\gamma \in \mathfrak{a}$, $n \in \mathbb{N}$ und

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \; ; \; \left| z - \frac{1}{n}\gamma \right| < \frac{1}{n} r \right\}$$

die offene Kreisscheibe mit Radius $\frac{1}{n}r$ um den Punkt $\frac{1}{n}\gamma$. Zeigen Sie: $D \cap \mathfrak{a}$ enthält höchstens den Punkt $\frac{1}{n}\gamma$.

Aufgabe 2 (2+2+3+3)

Diese Aufgabe dient als Vorüberlegung für die Berechnung der Idealklassengruppe von $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Sei $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$, $R = \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, $\mathfrak{a}$ ein Ideal in R und $\alpha \neq 0$ ein Element in $\mathfrak{a}$ mit minimaler Norm. Wir möchten zeigen, dass es nur zwei Fälle gibt:

Fall 1 Es ist $\mathfrak{a}$ das Hauptideal (α) und besitzt die $\mathbb{Z}$-Basis $(\alpha, \alpha\sqrt{-5})$.

Fall 2 Es ist $\mathfrak{a}$ kein Hauptideal und besitzt die $\mathbb{Z}$-Basis $(\alpha, \frac{1}{2}(\alpha + \alpha\sqrt{-5}))$.

Zeigen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben.

(a) Behandeln Sie Fall 1: Ist $\mathfrak{a} = (\alpha)$ so besitzt es die $\mathbb{Z}$-Basis $(\alpha, \alpha\sqrt{-5})$.

(b) Fassen Sie R als Unterring von $\mathbb{C}$ auf und skizzieren Sie das Gitter und einen Fundamentalbereichs eines Ideals $\mathfrak{a} = (\alpha)$.

(c) Ist $\beta \in \mathfrak{a}\backslash(\alpha)$, so kann man durch Verschieben mit Elementen aus (α) erreichen, dass β in dem Rechteck mit den Eckpunkten 0, α, $\alpha\sqrt{-5}$, $\alpha(1 + \sqrt{-5})$ liegt. Dann muss jedoch bereits $\beta \in \{\frac{1}{2}\alpha\sqrt{-5}, \frac{1}{2}\alpha(1 + \sqrt{-5}), \alpha + \frac{1}{2}\alpha\sqrt{-5}\}$ gelten.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1b. Eine Skizze hilft.

(d) Zeigen Sie, dass bei (c) sogar schon $\beta = \frac{1}{2}\alpha(1 + \sqrt{-5})$ gelten muss.

Bemerkung: Damit sind beide Fälle abgehandelt.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (5+5)

Sei $f = X^3 + X^2 - 2X - 1$ das Minimalpolynom von α und $K = \mathbb{Q}[\alpha]$. Ohne Beweis darf verwendet werden, dass $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$ gilt.

(a) Verwenden Sie Theorem 2.5.22, um $p\mathcal{O}_K$ mit $p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ zu faktorisieren. Welche p sind verzweigt, welche träge?

(b) Erkennen Sie eine Gesetzmäßigkeit für das Verzweigungsverhalten in Aufgabenteil (a)?