ulm university universität uulm

Prof. Dr. Stefan Wewers
Christian Steck
Wintersemester 2013/2014

Übungsblatt 8

Algebraische Zahlentheorie

Die Besprechung erfolgt am Mittwoch, dem 11.12.2013,
um 14:00 Uhr in O28 - 2003.

Aufgabe 1 (5)

Sei K ein Zahlkörper vom Grad n. Für ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{a} \lhd K$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ so, dass $m \cdot \mathfrak{a} \lhd \mathcal{O}_K$ ein ganzes Ideal ist und man definiert:

$$N(\mathfrak{a}) := m^{-n} N_{K/\mathbb{Q}}(m \cdot \mathfrak{a}),$$

wobei $N_{K/\mathbb{Q}}$ die bereits bekannte Norm für ganze Ideale bezeichne. Zeigen Sie, dass

$$N : J_K \to \mathbb{Q}^\times$$

wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 2 (5)

Sei $R = \mathcal{O}_K$ der Ganzheitsring eines Zahlkörpers K. Zeigen Sie:

$$R \text{ ist faktoriell} \Leftrightarrow R \text{ ist ein Hauptidealring}$$

Bemerkung: Die Aussage gilt allgemeiner für jeden Dedekindring R.

Aufgabe 3 (5+5)

In dieser Aufgabe wollen wir nun einige Idealklassengruppen berechnen. Zeigen Sie:

(a) Ist $K = \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, so ist $\mathrm{Cl}_K = 0$.

(b) Ist $K = \mathbb{Q}[\sqrt{-30}]$, so ist $\mathrm{Cl}_K \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Minkowskischranke M_K und dann das Zerlegungsverhalten des Ideals $p\mathcal{O}_K$ für alle Primzahlen $p \leq M_K$.