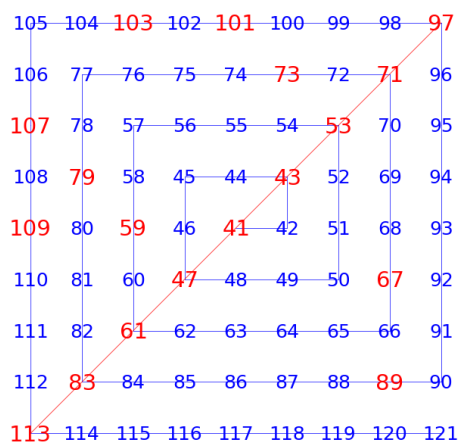


Prof. Dr. Stefan Wewers
 Christian Steck
 Institut für Reine Mathematik

Master-Vorlesung im WS 13/14

Algebraische Zahlentheorie

Betrachtet man die folgende spiralförmige Anordnung der natürlichen Zahlen $n \geq 41$, so stellt man etwas Überraschendes fest (die in der Liste vorkommenden Primzahlen sind in Rot gedruckt):



Alle Zahlen auf der Nebendiagonale sind Primzahlen! Kann das Zufall sein oder gibt es eine Erklärung für dieses Phänomen?

Eine ähnliche Überraschung erlebt man, wenn man sich die Dezimalentwicklungen der reellen Zahlen $e^{\pi\sqrt{n}}$ für $n \in \mathbb{N}$ anschaut: für einige Werte von n erhalten wir ‘fast’ eine ganze Zahl. Z.B. gilt

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743.99999999997726263\dots$$

Auch hier kann man sich die Frage stellen, ob dies Zufall ist oder ob wir einem mathematischen Geheimnis auf der Spur sind.

Erstaunlicherweise kann man beide Phänomene mit derselben Tatsache erklären: der Ring $\mathbb{Z}[\alpha] \subset \mathbb{C}$, der durch Adjunktion der komplexen Zahl

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{-163}}{2}$$

zu den ganzen Zahlen entsteht, ist *faktoriell*, d.h. erlaubt eine eindeutige Zerlegung seiner Elemente in Primelemente.

Traditionell versteht man unter *Zahlentheorie* das Studium der ganzen bzw. rationalen Zahlen. In der langen Geschichte der Zahlentheorie hat sich aber gezeigt, dass man den tieferen Geheimnissen der Zahlen nur dann auf die Spur kommt, wenn man auch endliche Erweiterungen der Ringe $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ studiert. Unter dem Begriff *algebraische Zahlentheorie* versteht man das systematische Studium solcher endlichen Erweiterungen. Die angekündigte Vorlesung wird eine Einführung in diese Theorie liefern.

Für einen umfassenderen Ausblick auf die Vorlesung siehe die vorläufige Version des bereitgestellten Skriptes.

Nach Absprache mit den Studierenden kann die Vorlesung auch auf Englisch gehalten werden. Das benötigte Vorwissen beschränkt sich auf die Inhalte der Anfängervorlesungen und den Vorlesungen *Elemente der Algebra* und *Elemente der Funktionentheorie*. Kenntnisse aus der Vorlesung *elementare Zahlentheorie* sind nützlich aber nicht notwendig.

Literatur:

- Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*
- Lang, *Algebraic number theory*
- Ireland and Rosen, *A classical introduction to modern number theory*
- Cox, *Primes of the form $x^2 + ny^2$*
- Wewers, *Algebraic number theory*, Skript zur Vorlesung