Lösungen Elemente der Algebra: Blatt 3

A1. Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe. Für $a \in G$ ist $\mathrm{ord}(a) := \min\{k \in \mathbb{N} : a^k = 1\}$ die *Ordnung* von a.

(a) Zeigen Sie, dass für $k \in \mathbb{Z}$ und $a \in G$ gilt: $a^k = 1$ genau dann, wenn $\mathrm{ord}(a) \mid k$.[1] (7)

Lösung: Sei $a^k = 1$. Somit ist auch $a^{k+\mathrm{ord}(a)} = a^k a^{\mathrm{ord}(a)} = 1$. Genauso ist $a^{k-\mathrm{ord}(a)} = 1$. Man findet also eine ganze Zahl m mit $a^{k+m\cdot\mathrm{ord}(a)} = 1$ und $0 \leq k + m \cdot \mathrm{ord}(a) < \mathrm{ord}(a)$. Nach Definition der Ordnung muss aber nun gelten $k + m \cdot \mathrm{ord}(a) = 0$, also $\mathrm{ord}(a) \mid k$. Für die umgekehrte Richtung sei m eine ganze Zahl mit $k = m \cdot \mathrm{ord}(a)$. Es ist also $a^k = a^{m\cdot\mathrm{ord}(a)} = (a^{\mathrm{ord}(a)})^m = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass für $a, b \in G$ gilt: Sind a, b konjugiert, dann ist $\mathrm{ord}(a) = \mathrm{ord}(b)$. (7)

Lösung: Sei $c \in G$ mit $a = c^{-1}bc$. Dann ist $a^{\mathrm{ord}(b)} = (c^{-1}bc)^{\mathrm{ord}(b)} = c^{-1}b^{\mathrm{ord}(b)}c = c^{-1}c = 1$. Nach der vorigen Teilaufgabe teilt also die Ordnung von a die Ordnung von b. Mit dem gleichen Argument teilt die Ordnung von b die Ordnung von a. Also sind beide gleich.

(c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass sich die Aussage der vorigen Teilaufgabe nicht umkehren lässt. (6)

Lösung: Betrachte die Untegruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, die von den Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ erzeugt wird (dies ist eine Gruppe mit 4 Elementen. Die beiden genannten Matrizen haben Ordnung 2 sind aber nicht konjugiert, da sie schon in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ nicht konjugiert sind (da ihre Eigenwerte nicht übereinstimmen; ähnliche Matrizen haben die gleichen Eigenwerte).

A2. (a) Betrachten Sie analog zum 15er Puzzle das 9er Puzzle. Finden Sie eine Lösung zu folgender Anfangssituation: (10)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 6 \\ 7 & 5 & \cdot \end{pmatrix}$$

Finden Sie also eine Sequenz von Zügen, die das Puzzle in den folgenden Zustand bringt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \cdot \end{pmatrix}$$

Geben Sie Ihre Lösung als Sequenz der freien Felder an, wenn die Felder von 1 bis 9 nummeriert sind; ihre Lösung sollte also mit 9 beginnen und enden.

(b) Zusatzaufgabe: Wir bestimmen unter allen Lösungen diejenigen, die die wenigsten Schritte benötigen. Ist Ihre Lösung unter diesen Abgaben, erhalten Sie 10 Bonuspunkte. (+10)

Lösung: Eine kürzeste Lösung hat 16 Schritte: 9,6,5,8,9,6,3,2,5,6,9,8,5,2,3,6,9.

[1] Das bedeutet $\mathrm{ord}(a)$ teilt k, d.h. es gibt eine ganze Zahl m mit $k = \mathrm{ord}(a) \cdot m$.