Universität Ulm

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Lösungen Elemente der Algebra: Blatt 5

A1. In dieser Aufgabe betrachten wir erneut die Gruppe $\mathbb{W}$, die Symmetriegruppe eines sechsseitigen Würfels. Wir wollen diese Gruppe wieder als Untegruppe von S_6 auffassen.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{W}$ aus höchstens 24 Elementen besteht. (Hinweis: Hier führt vielleicht ein kombinatorisches Argument zum Ziel. Wie viele Seiten eines Würfels muss man festlegen, damit dieser bestimmt ist?) (5)

Lösung: Eine Permutation $\sigma \in \mathbb{W}$ ist bereits durch $\sigma(1)$ und $\sigma(2)$ vollständig bestimmt. Kombinatorisch bestehen für $\sigma(1)$ 6 Möglichkeiten, danach für $\sigma(2)$ nur noch 4.

(b) Auf dem vorigen Blatt haben Sie die Rotationen genauer untersucht, die einen Würfel um eine Achse drehen, die durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Seiten geht. Es gibt noch zwei weitere Arten von Rotationsachsen. Finden Sie diese. Beschreiben Sie die neuen Rotationen als Elemente von S_6. (5)

(c) Bestimmen Sie nun alle Konjugationsklassen von $\mathbb{W}$ und deren Mächtigkeit. Folgern Sie, dass $\mathbb{W}$ aus 24 Elementen besteht. (10)

Lösung: Die Identität bildet eine Konjugationsklasse.

Die Drehungen um 90° sind konjugiert (voriges Blatt)

Drehungen um 180° um eine Achse die durch die Mittelpunkte zweier Seiten geht sind konjugiert: Seien σ^2, τ^2 Drehungen um 180°, so hatten wir gesehen, dass die entsprechenden Drehungen um 90° konjugiert sind, es gibt also $\epsilon \in \mathbb{W}$ mit $\sigma = \epsilon^{-1}\tau\epsilon$. Somit ist $\sigma^2 = \epsilon^{-1}\tau^2\epsilon$.

Legt man eine Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Kanten, erhält man weitere Rotationen. Entlang der sechs Achsen, welche man so erhält, lässt sich jeweils eine Rotation um 180° finden, es sind diese: $\tau_{12} = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 6)$, $\tau_{15} = (1\ 5)(2\ 6)(3\ 4)$, $\tau_{14} = (1\ 4)(2\ 5)(3\ 6)$, $\tau_{13} = (1\ 3)(2\ 5)(4\ 6)$, $\tau_{24} = (1\ 6)(2\ 4)(3\ 5)$, $\tau_{23} = (1\ 6)(2\ 3)(4\ 5)$. Die sind jeweils konjugiert, denn es ist $\tau_{12} = \sigma_{16}\tau_{14}\sigma_{16}^{-1}$ und aus Symmetriegründen sind auch die anderen konjugiert.

Legt man eine Achse durch gegenüberliegende Ecken, erhält man vier weitere Rotationen der Ordnung drei. Es sind dies $\epsilon_{123} = (1\ 3\ 2)(4\ 5\ 6)$, $\epsilon_{135} = (1\ 5\ 3)(2\ 4\ 6)$, $\epsilon_{145} = (1\ 4\ 5)(2\ 6\ 3)$, $\epsilon_{124} = (1\ 2\ 4)(3\ 6\ 5)$. Diese sind konjugiert, denn es ist $\epsilon_{123} = \sigma_{16}^{-1}\epsilon_{135}\sigma_{16}$ und aus Symmetriegründen sind auch die anderen konjugiert.

Untereinander sind diese Klassen nicht konjugiert, denn sie sind schon in S_6 nicht konjugiert, da ihr Typ nicht übereinstimmt. Man hat also Klassen gefunden mit mindestens 1, 6, 3, 6, 8 Elementen. Da $\mathbb{W}$ höchstens 24 Elemente hat, sind dies alle Konjugiertenklassen.

A2. Sei $G = D_6$, $H = \langle s \rangle \subseteq G$ und $U = \langle r \rangle \subseteq G$.

(a) Bestimmen Sie sämtliche Links- und Rechtsnebenklassen von H, d.h. die Element von G/H und $H\backslash G$. (5)

Lösung: Es ist $G/H = \{\{e, s\}, \{r, rs\}, \{r^2, r^2s\}, \{r^3, r^3s\}, \{r^4, r^4s\}, \{r^5, r^5s\}\}$ und $H\backslash G = \{\{e, s\}, \{r, sr\}, \{r^2, sr^2\}, \{r^3, sr^3\}, \{r^4, sr^4\}, \{r^5, sr^5\}\}$.[1]

(b) Bestimmen Sie für jedes Element aus U in welcher Rechtsnebenklasse von H es liegt. (5)

Lösung: Dies ließt man einfach ab.

(c) Finden Sie ein Element $g \in G$ mit $gH \neq Hg$. (5)

Lösung: Es ist $rH = \{(r, rs)\}$ und $Hr = \{(r, sr)\}$, wobei $rs \neq sr$.

[1] Der umständliche Beweis aus der Übung ist nicht nötig, da sie bereits in der Vorlesung bemerkt hatten, dass sämtliche Nebenklassen die Mächtigkeit $|H|$ haben.