Universität Ulm

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Lösungen Elemente der Algebra: Blatt 6

A1. (a) Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe mit $(G : H) = 2$. Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von G ist. (5)

Lösung: Es gibt zwei Rechtsnebenklassen. Eine enthält die Einheit und somit gerade H, die andere enthält die Elemente von $G \setminus H$. Gleiches gilt für Linksnebenklassen. Ist nun $g \in H$, dann ist offensichtlich $gH = H = Hg$. Ist $g \in G \setminus H$, dann enthält gH nicht H und ist somit gleich $G \setminus H$ also gleich Hg.

(b) Bestimmen Sie sämtliche Normalteiler von S_4. (Hinweis: Benutzen Sie den Satz, dass A_n von den 3-Zykeln erzeugt wird.) (10)

Lösung: Sei H ein Normalteiler von G der eine Transposition $(a\,b)$ enthält. Da alle Transpositionen konjugiert sind enthält H alle Transpositionen und da diese S_4 erzeugen, ist $H = S_4$. Sei nun H ein Normalteiler von G der $(a\,b\,c\,d)$ enthält. H enthält also sämtliche Vierzykel, da diese konjugiert sind. Es ist aber $(a\,b\,c\,d)^2(a\,c\,b\,d) = (c\,d)$. Also enthält H alle Transpositionen und $H = S_4$. Es ist also ein Normalteiler $H \neq S_4$ eine Untergruppe von A_4. Sei nun also $H \subseteq A_4$ ein Normalteiler von S_4. Enthält H einen Dreizykel, so enthält H alle 3-Zykel und es ist $H = A_4$. Die einzige nicht-triviale Untegruppe von A_4, die ein Normalteiler ist, ist also die Gruppe die von Permutationen der Form $(a\,b)(c\,d)$ erzeugt wird. Insgesamt hat man also vier Normalteiler von S_4 gefunden.

A2. (a) Sei $G = D_6$.

(i) Bestimmen Sie sämtliche Untergruppen von G. (6)

Lösung: Es ist $G = \{s^a r^b : a \in \{0, 1\}, b \in \{0, \ldots, 5\}\}$. Zunächst eine einleitende Überlegung: Es ist $\langle r^b, r^{b'}\rangle = \langle r^{\gcd(b,b')}\rangle$ und es ist $\langle sr^b, sr^{b'}\rangle = \langle r^{b-b'}, sr^b\rangle$; alle Untegruppen von G werden also bereits von zwei Elementen erzeugt. Außerdem ist $\langle r^b\rangle = \langle r^{6-b}\rangle$, es genügt also die Elemente mit $a = 0, b \in \{0, \ldots, 3\}$ bzw. $a = 1, b \in \{0, \ldots, 5\}$ als Erzeuger zu betrachten.
Wir bestimmen zunächst die Untegruppen welche von einem Element erzeugt werden: Es sind dies $\langle e\rangle, \langle r\rangle, \langle r^2\rangle, \langle r^3\rangle, \langle s\rangle, \langle sr\rangle, \langle sr^2\rangle, \langle sr^3\rangle, \langle sr^4\rangle, \langle sr^5\rangle$. Diese Gruppen bestehen aus $1, 6, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2$ Elementen. Um zu überprüfen, dass diese Gruppen paarweise verschieden sind, muss also nur gezeigt werden, dass dies für die hinteren 7 Gruppen der Fall ist. Dies ist aber trivialerweise der Fall, denn eine Gruppe mit zwei Elementen enthält nur den Erzeuger und die Einheit; die angegebenen Erzeuger sind jedoch paarweise verschieden.
Bestimmen wir nun die Untegruppen welche von zwei Elementen, jedoch nicht von einem Element, erzeugt werden: Nach der einleitenden Überlegung sind diese von der Form $\langle r^b, sr^{b'}\rangle$. Wegen $\langle r^b, sr^{b'}\rangle = \langle r^b, sr^{b'-b}\rangle$ können wir annehmen, dass $0 \leq b' < b$. Es bleiben also $\langle r, s\rangle = G, \langle r^2, s\rangle, \langle r^2, sr\rangle, \langle r^3, s\rangle, \langle r^3, sr\rangle, \langle r^3, sr^2\rangle$. Offensichtlich sind diese Gruppen paarweise verschieden von denen, die von einem Element erzeugt werden. Bestimmen wir zunächst die Ordnungen: Bekanntermaßen ist $|\langle r, s\rangle| = 12$. Es ist $\langle r^3, sr^b\rangle = \{e, r^3, sr^b, sr^{b+3}\}$, also eine Gruppe mit 4 Elementen. Es ist $\langle r^2, sr^b\rangle = \{e, r^2, r^4, sr^b, sr^{b+2}, sr^{b+4}\}$, also eine Gruppe mit 6 Elementen. Diese Gruppen sind paarweise verschieden. D_6 besitzt also 16 Untergruppen.

(ii) Welche Untergruppen von G sind zueinander konjugiert? (6)

Lösung: Znächst bemerken wir, dass allgemein gilt: $h^{-1}\langle g_1, \ldots, g_n\rangle h = \langle h^{-1}g_1h, \ldots, h^{-1}g_nh\rangle$. Es können nur Gruppen mit der gleichen Anzahl von

Elementen konjugiert sein. Betrachten wir zunächst die Gruppen mit 2 Elementen: $\langle r^3\rangle$ kann nicht konjugiert zu einer anderen Gruppe sein, da r^3 mit allen Elementen aus G vertauscht. Für die anderen ist $(sr^{b'})^{-1}(sr^b)(sr^{b'}) = r^{-b'}ssr^bsr^{b'} = r^{b-b'}sr^{b'} = sr^{2b'-b}$ und $r^{-b'}(sr^b)r^{b'} = sr^{2b'+b}$, es sind also einzig konjugiert $\langle s\rangle, \langle sr^2\rangle, \langle sr^4\rangle$ und $\langle sr\rangle, \langle sr^3\rangle, \langle sr^5\rangle$. Die Gruppen mit 6 Elementen sind nicht konjugiert, denn nur $\langle r^2, s\rangle$ enthält nur Elemente mit Vorzeichen 1. Die Gruppen $\langle r^3, sr^b\rangle$ sind konjugiert, denn $s\langle r^3, sr\rangle s = \langle r^3, sr^5\rangle = \langle r^3, sr^2\rangle$ und $r^{-1}\langle r^3, s\rangle r = \langle r^3, sr^2\rangle$.

(iii) Bestimmen Sie sämtliche Normalteiler von G. (6)

Lösung: Ein Normalteiler H erfüllt $g^{-1}Hg = H$ für alle $g \in G$. Es sind dies also gerade die Gruppen die nicht konjugiert zu einer anderen Gruppe sind: $\langle e\rangle, \langle r\rangle, \langle r^2\rangle, \langle r^3\rangle, \langle r^2, s\rangle, \langle r^2, sr\rangle, G$.

(b) Sei $D_n = \langle r, s\rangle$ die Diedergruppe mit $2n$ Elementen[1]. Sei H eine Untergruppe von D_n die ein Element der Form sr^k für ein $k \in \mathbb{Z}$ enthält. Zeigen Sie: H ist isomorph zu D_m für ein $m|n$. (7)

Lösung: Ist $H = \langle sr^k\rangle$, dann ist $H \simeq D_1$ wegen $(sr^k)^2 = e$. Ansonsten wird H von zwei Elementen erzeugt. Sei nun $H = \langle r^a, sr^b\rangle$. Dann ist $H = \langle r^{\gcd(a,n)}, sr^b\rangle$. Setze $m = \gcd(a, n)$, $R = r^m$, $S = sr^b$. Dann ist $R^{n/m} = e$ und $SR = sr^br^m = r^{-m}sr^b = R^{-1}S$, also $H \simeq D_m$. Ist $H = \langle sr^b, sr^{b'}\rangle$ mit $b > b'$, dann ist wie in 1(a), $H = \langle r^{b-b'}, sr^{b'}\rangle$.

[1] für $n = 1, 2$ ist die Definition etwas unklar. Es sei hier also $D_1 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $D_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.