UNIVERSITÄT ULM

Prof. Dr. S. Wewers
WS 2013/2014

Lösungen Elemente der Algebra: Blatt 7

A1. Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X wirkt.

(a) Seien $x, y \in X$ Elemente, die auf der selben Bahn liegen. Zeigen Sie, dass dann die Stabilisatoren G_x, G_y konjugiert sind. (10)

Lösung: Sei $g \in G$ mit $gx = y$. Sei $h \in G_y$. Dann ist $g^{-1}hgx = x$ also $g^{-1}hg \in G_x$ und also $g^{-1}G_y g \subseteq G_x$. Umgekehrt sei $h \in G_x$. Dann ist $h = g^{-1}ghg^{-1}g$ mit $ghg^{-1} \in G_y$ nd also $g^{-1}G_y g \supseteq G_x$.

(b) Sei X endlich und seien $g, g' \in G$ konjugiert. Zeigen Sie, dass die Fixpunktmengen X^g und $X^{g'}$ gleich viele Elemente besitzen. (10)

Lösung: Sei $g = h^{-1}g'h$. Dann definiert $x \mapsto hx$ eine Abbildung von X^g nach $X^{g'}$, denn $g'(hx) = hgx = hx$. Diese Abbildung ist injektiv, da die Wirkung eines Gruppenelements stets injektiv ist (ist $hx = hx'$ dann ist $x = h^{-1}hx = h^{-1}hx' = x'$). Sie ist surjektiv, da die Abbildung $x \mapsto h^{-1}x$ invers ist.

A2. (a) Wie viele verschiedene Perlenketten, die aus sieben Perlen bestehen, lassen sich bilden, wenn Perlen in drei verschiedenen Farben zur Verfügung stehen? (10)

Lösung: Sei $X := \{f : \{1, \ldots, 7\} \to \{1, 2, 3\}\}$, und sei $G = D_7 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3,$ die Symmetriegruppe eines regulären Siebenecks. Definiere eine Wirkung von G auf X durch $g \cdot f := (n \mapsto f(g(n)))$.[1] Um das Burnside-Lemma verwenden zu können, bestimmen wir die Mächtigkeit der Fixpunktmengen der einzelnen Elemente von G. Es ist $|X^e| = |X| = 3^7$, $|X^r| = |X^{r^2}| = |X^{r^3}| = |X^{r^4}| = |X^{r^5}| = |X^{r^6}| = 3$, $|X^s| = 3^4 = |X^{sr}| = |X^{sr^2}| = |X^{sr^3}| = |X^{sr^4}| = |X^{sr^5}| = |X^{sr^6}|$. Somit erhält man für die Menge der Orbits $|X/G| = \frac{1}{14}(3^7 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 3^4) = 198$.

(b) Wie viele verschiedene Perlenketten, die aus sechs Perlen bestehen, lassen sich bilden, wenn Perlen in zwei verschiedenen Farben zur Verfügung stehen? (10)

Lösung: Sei wieder $X := \{f\{1, \ldots, 6\} \to \{1, 2\}\}$, und sei $G = D_6 = \{e, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3,$ die Symmetriegruppe eines regulären Sechsecks. Definiere die Wirkung von G auf X wie oben. Wir bestimmen $|X^e| = 2^6$, $|X^r| = |X^{r^5}| = 2$, $|X^{r^2}| = |X^{r^4}| = 2^2$, $|X^{r^3}| = 2^3$, $|X^s| = |X^{sr^2}| = |X^{sr^4}| = 2^4$, $|X^{sr}| = |X^{sr^3}| = |X^{sr^5}| = 2^3$. Also $|X/G| = \frac{1}{12}(2^6 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^3) = 13$.

[1] Streng genommen ist das keine Gruppenwirkung wie sie in der Vorlesung definiert wurde. Siehe Blatt 8.