Elemente der Algebra: Klausur am 22.4.2014

A1. Seien

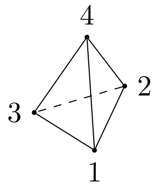
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Elemente von S_5.

(a) Bestimmen Sie die Zykeldarstellung und das Vorzeichen von $\sigma, \tau, \sigma\tau, \tau\sigma$. (3)

(b) Finden Sie ein Element $\varrho \in S_5$ mit $\varrho\sigma\varrho^{-1} = \tau$ oder argumentieren Sie, warum es ein solches ϱ nicht gibt. (3)

A2. Die Ecken eines Tetraeders seien wie in der Abbildung nummeriert. Diese Nummerierung führt zu einem injektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi\colon \mathbb{T} \to S_4$, wobei $\mathbb{T}$ die Tetraedergruppe bezeichne, also die Gruppe der Drehsymmetrien eines Tetraeders.



(a) Ist σ ein Element von $\varphi(\mathbb{T})$? Wenn ja, beschreiben Sie dieses Element geometrisch.

(i) $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4)$. (2)

(ii) $\sigma = (1\ 3)(2\ 4)$. (2)

(b) Bestimmen Sie ein Element der Ordnung 3 in $\varphi(\mathbb{T})$. (Sie müssen nicht argumentieren, warum das von Ihnen gewählte Element in $\varphi(\mathbb{T})$ liegt.) (2)

A3. (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es die Seiten eines Tetraeders mit drei Farben zu färben? (3)

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es die Seiten eines Tetraeders mit drei Farben zu färben, wenn auch Färbungen identifiziert werden, die durch Spiegelungen ineinander überführt werden können? (D.h.: Wie viele Färbungen gibt es bezüglich der vollen Tetraedergruppe, die auch die Spiegelungen enthält?) (3)

A4. Ist in den folgenden Fällen $f \in K[x]$ irreduzibel? Sollte dies nicht der Fall sein, untersuchen Sie in wie viele irreduzible Faktoren f zerfällt.

(a) $K = \mathbb{Q}$, $f = x^3 + x + 1$. (3)

(b) $K = \mathbb{F}_{p^n}$, $f = x^{p^n} - x$, wobei p eine Primzahl ist. (3)

(c) $K = \mathbb{F}_3$, $f = x^9 + x^3 + 1$. (3)

A5. Bestimmen Sie in den folgende Fällen für $\alpha \in L$ das Minimalpolynom über K.

(a) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{R}$, $\alpha = 1 + \sqrt{3}$. (2)

(b) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$, $\alpha = \frac{i+1}{\sqrt{2}}$. (2)

(c) $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{C}$, $\alpha = \pi i$. (2)

A6. Sei $f = x^3 - x - 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ irreduzibel. Sei $\alpha \in \mathbb{F}_{27}$ eine Nullstelle von f. Es ist also $\mathbb{F}_{27} = \mathbb{F}_3[\alpha]$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α^2, α^9 und α^{27} über $\mathbb{F}_3$. (3)

(b) Ist α ein Erzeuger von $\mathbb{F}_{27}^{\times}$? (3)

(c) Sei β ein Erzeuger von $\mathbb{F}_{27}^{\times}$. Bestimmen Sie β^{13}. (3)

A7. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (Beantworten Sie die Fragen ohne Begründung; Die Lösung jeder Teilaufgabe soll also nur aus dem Wort *wahr* oder dem Wort *falsch* bestehen. Für jede richtige Lösung erhalten Sie 2 Punkte, für jede falsche Lösung werden Ihnen 2 Punkte abgezogen. Insgesamt können Sie jedoch nicht weniger als 0 Punkte erhalten.)

(a) Sei R ein euklidischer Ring und $a, b, c \in R \setminus \{0\}$. Dann gilt (±2)

$$a \cdot \mathrm{ggT}(b, c) = \mathrm{ggT}(ab, ac).$$

(b) Sei G eine abelsche Gruppe. Dann besteht jede Konjugationsklasse von G aus genau einem Element. (±2)

(c) Sei G eine Gruppe. Besteht jede Konjugationsklasse von G aus genau einem Element, dann ist G abelsch. (±2)

(d) Sei $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Ist das Ideal $(a, b, c) = \mathbb{Z}$, dann sind a, b, c paarweise teilerfremd. (±2)

Es können bei der Klausur insgesamt 50 Punkte erreicht werden. Erreichen Sie 20 oder mehr Punkte, haben Sie die Klausur bestanden. Es sind, neben Schreibzeug und Würfeln, keine weiteren Hilfsmittel zugelassen.

Viel Erfolg!