Algebra (Wintersemester 2014/15)

Stefan Wewers, Michel Börner

Blatt: 2
Punkte: 20

Abgabe **zu zweit oder zu dritt** in der Vorlesung am Mo., 27.10. oder bis Mo., **27.10.14** um 23:59 Uhr in He18, Zimmer E07.
Hinweis: Prof. Wewers ist in der Woche vom 27.-31.10. nicht in Ulm, es wird jedoch eine Vertretung geben. Beachten Sie dazu die Vorlesungshomepage.

Aufgabe 1 (algebraische Körpererweiterungen) **(5 P)**

Seien M/K und L/M algebraische Körpererweiterungen. Zeigen Sie, dass L/K ebenfalls algebraisch ist.

Aufgabe 2 (Nullstellen) (2+1+2 = **5 P**)

Sei $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist. Verwenden Sie dazu **nicht** das Eisenstein-Kriterium, sondern die Reduktion modulo einer geeigneten Primzahl p.

b) Bestimmen Sie die drei komplexen Nullstellen $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ von f.

c) Sei $K_i := \mathbb{Q}[\theta_i]$ und $L = \mathbb{Q}[\theta_1, \theta_2, \theta_3]$. Bestimmen Sie die Körpergrade $[K_i : \mathbb{Q}]$, $[L : K_i]$ sowie $[L : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 3 (Zerfällungskörper) (2+3 = **5 P**)

Sei $\zeta := e^{2\pi i/7} = \cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7)$ eine primitive siebte Einheitswurzel und

$$\begin{aligned}
\theta_1 &:= \zeta + \bar{\zeta} = 2\cos(2\pi/7)\\
\theta_2 &:= \zeta^2 + \bar{\zeta}^2 = 2\cos(4\pi/7)\\
\theta_3 &:= \zeta^3 + \bar{\zeta}^3 = 2\cos(6\pi/7).
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie: $g := (x-\theta_1)\cdot(x-\theta_2)\cdot(x-\theta_3) = x^3 + x^2 - 2x - 1$.

b) Zeigen Sie: $\theta_2, \theta_3 \in \mathbb{Q}[\theta_1]$.
Was sagt dieses Ergebnis über den Zerfällungskörper von g aus (im Gegensatz zum Zerfällungskörper von f in Aufgabe 2)?

Aufgabe 4 (transzendente Körpererweiterung) (2+3 = **5 P**)

Sei $F := \mathbb{Q}(x, y \mid x^2 + y^2 = 1)$ der Quotientenkörper des Rings

$$\mathbb{Q}[x,y]/(x^2+y^2-1).$$

a) Bestimmen Sie den Transzendenzgrad von $F/\mathbb{Q}$.

b) Zeigen Sie, dass $F/\mathbb{Q}$ eine rein transzendente Körpererweiterung ist.
Hinweis: Betrachten Sie das Element $t := (y-1)/x$ in F.