Algebra (Wintersemester 2014/15)

Stefan Wewers, Michel Börner

Blatt: 7
Punkte: 20

Abgabe **zu zweit oder zu dritt** vor der Vorlesung am Di., **02.12.14** oder am gleichen Tag in He18, Zimmer E07 (ggf. unter der Tür durchschieben). **Bitte auch das Moodle-Forum nutzen!**

Aufgabe 1 (Hauptideale) (2+3 = **5 P**)

Bestimmen Sie für die folgenden Ideale $I = (a_1, \dots, a_r) \lhd R$ ein $d \in R$ mit $I = (d)$ und eine explizite Darstellung $d = a_1 b_1 + \dots, a_r b_r$, $b_i \in R$.

a) $R = \mathbb{Z}$, $a_1 = 70$, $a_2 = 84$, $a_3 = 91$.

b) $R = \mathbb{Q}[x]$, $a_1 = x^3 + 2x^2 - x - 2$, $a_2 = x^3 - 7x - 6$, $a_3 = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

Aufgabe 2 (irreduzible Elemente) (**5 P**)

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $R_n := \mathbb{Q}[x_n]$. Für alle $n \mid m$ gibt es einen injektiven Ringhomomorphismus $R_n \hookrightarrow R_m$, $x_n \longmapsto x_m^{m/n}$. Sei $R := \bigcup_n R_n$, d.h. $R = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots]$ und wir identifizieren $x_m^{m/n} = x_n$, d.h. obiger Ringhomomorphismus ist eine Einbettung.

Es bietet sich folgende Schreibweise an: $x := x_1$, $x^{1/n} = x_n$. Damit ist $R_n = \mathbb{Q}[x^{1/n}]$.

Zeigen Sie: Das Element $x \in R$ ist keine Einheit und lässt sich nicht als Produkt irreduzibler Elemente schreiben.

Hinweis: Für $a_1, \dots, a_r \in R$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_1, \dots, a_r \in R_n$.

Aufgabe 3 (Gaußsche Zahlen) (2+2+1 = **5 P**)

Sei $R = \mathbb{Z}[i] = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$.

a) Bestimmen Sie in R die Primfaktorzerlegung von $9 + 2i$. Begründen Sie, warum die Faktoren prim sind.

b) Gegeben sei $a := -1 + 5i$, $b := 1 - 3i$. Bestimmen Sie einen Erzeuger c des Hauptideals $(c) = (a, b) \lhd R$. Warum existiert ein solches c ?

c) Geben Sie ein Primelement $\pi \in \mathbb{Z}[i]$ an mit $N(\pi) = p \geq 50$, p eine Primzahl.

Aufgabe 4 (Faktorielle Ringe) (1+1+1+2 = **5 P**)

Sei R ein faktorieller Ring, $\mathbb{P}$ ein Vertretersystem der Assoziiertenklassen aller Primelemente von R. Für $p \in \mathbb{P}$ sei $v_p : R \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{N}_0$, $v_p(a) := \max\{k\,;\, p^k \text{ teilt } a\}$. Für $a, b \in R \setminus \{0\}$ definieren wir

$$\operatorname{ggT}(a, b) := \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\min\{v_p(a), v_p(b)\}} \qquad \operatorname{kgV}(a, b) := \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\max\{v_p(a), v_p(b)\}} .$$

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $\operatorname{ggT}(ab, ac) \sim a \cdot \operatorname{ggT}(b, c)$

b) $\operatorname{kgV}(ab, ac) \sim a \cdot \operatorname{kgV}(b, c)$

c) $a \cdot b \sim \operatorname{ggT}(a, b) \cdot \operatorname{kgV}(a, b)$

d) Es gibt $c, d \in R$ mit $\operatorname{ggT}(a, b) = ac + bd$.