Algebra (Wintersemester 2014/15)

Stefan Wewers, Michel Börner

Blatt: 12
Punkte: 20

Abgabe zu zweit oder zu dritt vor der Vorlesung am Di., **27.01.15** oder am selben Tag in He18, Zimmer E07 (ggf. unter der Tür durchschieben).

Aufgabe 1 (endlich erzeugte Moduln) (3+2 = **5 P**)

Sei R ein noetherscher Ring, d.h. jedes Ideal $I \lhd R$ ist endlich erzeugt.

a) Sei $U \subseteq R^n$ ein R-Untermodul, sowie

$$\begin{aligned}\pi:\ R^n &\to R^{n-1},\\ (a_1,\dots,a_{n-1},a_n) &\mapsto (a_1,\dots,a_{n-1})\end{aligned}$$

und $\varphi := \pi\big|_U :\ U \to R^{n-1}$.

Zeigen Sie, dass U endlich erzeugt ist.

Hinweis: Benutzen Sie $\mathrm{Bild}(\varphi), \ker(\varphi)$ und Induktion über n.

b) Schließen Sie aus Teilaufgabe a): Ist V endlich erzeugter R-Modul, so ist jeder Untermodul endlich erzeugt.

Aufgabe 2 (diskrete Untergruppen) (2+2+2 = **6 P**)

Sei $\Gamma \subseteq (\mathbb{R}^n, +)$ eine *diskrete* Untergruppe, d.h. für $\gamma \in \Gamma$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\Gamma \cap U = \{\gamma\}$).

a) Sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum und $\Gamma \nsubseteq V$. Zeigen Sie, dass es dann einen kürzesten Vektor (bezüglich der euklidischen Norm) in $\Gamma \setminus V$ gibt.

b) Zeigen Sie: Γ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang $\leq n$.
Hinweis: Definieren Sie induktiv γ_i als den kürzesten Vektor in $\Gamma \setminus \langle\gamma_1,\dots,\gamma_{i-1}\rangle_{\mathbb{R}}$ für $i = 1,\dots$ bis $\Gamma \subseteq \langle\gamma_1,\dots,\gamma_i\rangle_{\mathbb{R}}$
neu: und zeigen Sie $\Gamma \cap \langle\gamma_1,\dots,\gamma_i\rangle_{\mathbb{R}} = \langle\gamma_1,\dots,\gamma_i\rangle_{\mathbb{Z}}$.

c) Sei $\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$. Finden Sie den kürzesten Vektor $\gamma_1 \in \Gamma \setminus \{0\}$ und ergänzen Sie γ_1 zu einer $\mathbb{Z}$-Basis (γ_1, γ_2) von Γ. (ohne Beweis)

Aufgabe 3 (Smith-Form) (3+2 = **5 P**)

a) Sei $A = \begin{pmatrix} 6 & 12 & -4 \\ 24 & 4 & 28 \\ 0 & -44 & 44 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{Z})$. Finden Sie Matrizen $S, T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ mit

$$SAT = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und } d_1 \mid d_2.$$

b) Sei $V := \mathbb{Z}^3$ und $U := \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ -44 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 28 \\ 44 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \subseteq V$. Finden Sie eine Basis (v_1, v_2, v_3) von V sodass $(d_1 v_1, d_2 v_2)$ eine Basis von U ist.

Aufgabe 4 (Elementarteilerzerlegung) **(4 P)**

Sei $V := \langle v_1, v_2 \mid 2v_1 + 2v_2 = 0, -2v_1 + 4v_2 = 0 \rangle_{\mathbb{Z}}$.

Genauer: V sei ein $\mathbb{Z}$-Modul mit Erzeugendensystem (v_1, v_2) und für $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to V, (a_1, a_2) \mapsto a_1 v_1 + a_2 v_2$ gilt:

$$\mathrm{Kern}(\varphi) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Ihre Aufgabe: Bestimmen Sie ein Erzeugendensystem (w_1, w_2) von V und einen Isomorphismus

$$\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} V.$$