Diophantische Gleichungen: Blatt 10

Stefan Wewers
Michael Eskin

Abgabe: 23.12.2014, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden!

Aufgabe 1 *(6+6+3* Punkte)*
Sei E die elliptische Kurve über $\mathbb{Q}$ mit Weierstraß-Gleichungen

$$y^2 = x^3 + 17,$$

und

$$P_1 = (-2,3), \quad P_2 = (-1,4), \quad P_3 = (2,5), \quad P_4 = (4,9), \quad P_5 = (8,23).$$

(a) Schreiben Sie P_2, P_4 und P_5 in der Form $n \cdot P_1 + m \cdot P_3$ mit $n, m \in \mathbb{Z}$.

Hinweis: Berechnen Sie $n \cdot P_1 + m \cdot P_3$ für kleine Werte von n und m.

(b) Berechnen Sie $P_6 := -P_1 + 2 \cdot P_3$ und $P_7 := 3 \cdot P_1 - P_3$.

(c) Finden Sie einen weiteren Punkt $P_8 = (a,b) \in E$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 2 *(3+5 Punkte)*
Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, $F \in K[x,y,z]$ ein homogenes Polynom vom Grad $d \geq 2$ und $X = Z(F)$ die zugehörige projektive Kurve in $\mathbb{P}^2_K$.

(a) Angenommen $F = F_1 F_2$, wobei F_i homogene Polynome vom Grad $< d$ sind. Sei P ein Punkt auf X mit

$$F_1(P) = F_2(P) = 0.$$

Zeigen Sie, dass P kein glatter Punkt von X ist.

(b) Nun sei $d = 3$ und X glatt. Schließen Sie aus (a), dass dann das Polynom F irreduzibel ist, d.h., dass es keine Zerlegung $F = F_1 F_2$ wie in (a) gibt.