Lösung zu Blatt 1 Aufgabe 1 (d)

Aufgabe 1 *(2+2+2+2+2 Punkte)*
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $xy = z^n$ und $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$. Dann gilt $x = a^n, y = b^n$ für gewisse $a, b \in \mathbb{Z}$.

(b) Seien $x, y, z, n \in \mathbb{N}$ mit $xy = z^n$ und $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$. Dann gilt $x = a^n, y = b^n$ für gewisse $a, b \in \mathbb{Z}$.

(c) Die diophantische Gleichung
$$x^2 + 2xy + 2y^2 = 13$$
besitzt mindestens 4 verschiedene Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

(d) Die diophantische Gleichung
$$2x^2 - xy + y^2 = 3$$
besitzt unendlich viele Lösungen $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

(e) Die diophantische Gleichung
$$3x^2 - y^2 = 5$$
besitzt keine Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

Lösung zu Aufgabe 1 (d):

In der Übung ist ein Flüchtigkeitsfehler in der alternativen, rechnerischen Lösung aufgetaucht. Hier ist die korrekte Fassung:

Es ist

$$\begin{aligned}
2x^2 - xy + y^2 &\geq 2x^2 + y^2 - |xy| \\
&\geq 2x^2 + y^2 - 2|xy| \\
&= (x^2 - 2|xy| + y^2) + x^2 \\
&= (|x| - |y|)^2 + x^2.
\end{aligned}$$

Für $|x| \geq 2$ ist $(|x| - |y|)^2 + x^2 \geq x^2 \geq 2^2 > 3$. Also kann $2x^2 - xy + y^2 = 3$ nur für $|x| \leq 1$ gelten.

Für $|y| \geq 3$ gilt unter Ausnutzung von $|x| \leq 1$: $(|x| - |y|)^2 \geq (1 - |y|)^2 \geq (-2)^2 = 4 > 3$. Somit gilt auch für $|y| \geq 3$, dass $(|x| - |y|)^2 + x^2 > 3$.

Die Menge $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$ ist endlich und somit auch die Lösungsmenge von $2x^2 - xy + y^2 = 3$.