

Diophantische Gleichungen: Blatt 2

Stefan Wewers

Michael Eskin

Abgabe: 28.10.2014, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden!

Aufgabe 1 (2+2+2+4 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Quadriken den Typ (degeneriert, Ellipse, Hyperbel, Parabel) und fertigen Sie eine Skizze an. Bestimmen Sie die Menge der \mathbb{Q} -rationalen Punkte.

- (a) $x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$
- (b) $2x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0$
- (c) $3x^2 + 2y^2 - 4y + 1 = 0$
- (d) $x^2 - y^2 - 2 = 0$.

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)

Es sei Q die Menge der natürlichen Zahlen, die Summe zweier Quadrate sind, d.h.

$$Q = \{a \in \mathbb{N} \mid \exists x, y \in \mathbb{Z} : a = x^2 + y^2\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Falls $a, b \in Q$, dann ist auch ab in Q

Hinweis: Benutzen Sie $x^2 + y^2 = |x + iy|^2$.

- (b) Es gilt $a \in Q$ genau dann, wenn für alle Primteiler p von a gilt:

- (i) entweder ist $p = 2$ oder
- (ii) $p \equiv 1 \pmod{4}$ oder
- (iii) der Exponent von p in der Primfaktorzerlegung von a ist gerade.

Hinweis: Benutzen Sie die eindeutige Primfaktorzerlegung in $\mathbb{Z}[i]$.