

Diophantische Gleichungen: Blatt 5

Stefan Wewers

Michael Eskin

Abgabe: 18.11.2014, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden!

Aufgabe 1 (4+5+2 Punkte)

- (a) Seien $x = \sum_i a_i p^i$ und $y = \sum_i b_i p^i$ in \mathbb{Q}_p zwei p -adische Zahlen mit $0 \leq a_i, b_i \leq p-1$. Zeigen Sie: Es gilt $|x-y|_p < 1/p^n$ genau dann, wenn $a_i = b_i$ für alle $i \leq n$.
- (b) Sei (x_k) eine Cauchy-Folge in \mathbb{Q}_p (bzgl. $|\cdot|_p$). Zeigen Sie, dass die Folge gegen einen eindeutigen Grenzwert konvergiert.
- (c) Sei (x_k) eine Nullfolge in \mathbb{Q}_p . Zeigen Sie, dass die Summe $\sum_k x_k$ konvergiert.

Anmerkung: Beachten Sie den Unterschied zu Folgen in den reellen Zahlen!

Aufgabe 2 (3+3+3 Punkte)

Entscheiden Sie für welche Primzahlen p die folgenden diophantischen Gleichungen nichttriviale Lösungen in \mathbb{Q}_p besitzen. Welche besitzt nichttriviale Lösungen in \mathbb{Q} ? Wenn es eine Lösung in \mathbb{Q} gibt, finden Sie eine nichttriviale!

- (a) $3x^2 + 5y^2 = 7z^2$
- (b) $3x^2 + 7y^2 = 5z^2$
- (c) $5x^2 + 7y^2 = 3z^2$.