Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die diophantische Gleichungen

$$(X^2 - 13Y^2)(X^2 - 17Y^2)(X^2 - 13 \cdot 17Y^2) = 0$$

nichttriviale Lösungen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}_p$ für alle p besitzt, aber keine nichttriviale Lösung in $\mathbb{Q}$.

Hier ist der Zusatz zu $p = 2$. Der Beweis, dass es eine Lösung in $\mathbb{Q}_2$ gibt folgt natürlich wie bei den anderen $\mathbb{Q}_p$ mit Hilfe von Hensels Lemma.

Wir verwenden hier die Notation aus der Übung:

- $f_1 = X^2 - 13$
- $f_2 = X^2 - 17$
- $f_3 = X^2 - 13 \cdot 17$.

Für $\tilde{x} = 5 \in \mathbb{Z}_2$ gilt $f_2'(\tilde{x}) = 2\tilde{x} = 10$. Somit $\ell = v_2(f_2'(\tilde{x})) = 1$. Weiter ist

$$f_2(\tilde{x}) = 25 - 17 = 8 \equiv 0 \bmod 8 (= 2^{2\ell+1}).$$

Somit existiert nach Hensels Lemma ein $x \in \mathbb{Z}_2$ sodass $f_2(x) = 0$.

Hinweis: Man beachte den Unterschied zu den anderen Primzahlen $p \neq 2$. Es genügt hier im Fall $p = 2$ nämlich NICHT nur die Restklasse modulo 2 zu betrachten.