

Diophantische Gleichungen: Blatt 8

Stefan Wewers

Michael Eskin

Abgabe: 09.12.2014, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sollen in Dreiergruppen abgegeben werden!

Aufgabe 1 (2+2+2+3 Punkte)

Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der Kurven $X = V(F), Y = V(G)$ in der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(K)$ für die folgenden homogenen Polynome F und G über einem Körper K . Skizzieren Sie außerdem in (a) und (d) die Lage der Kurven in der (x, y) -Ebene.

- (a) $K = \mathbb{R}$ sowie $F = X^2 + Y^2 - Z^2$ und $G = X + Y - 2Z$.
- (b) $K = \mathbb{C}$ sowie $F = X^2 + Y^2 - Z^2$ und $G = X + Y - 2Z$.
- (c) $K = \mathbb{F}_5$ sowie $F = X^2 + Y^2 - Z^2$ und $G = X + Y - 2Z$.
- (d) $K = \mathbb{R}$ sowie $F = Y^2Z - X^3 + XZ^2$ und $G = X - Z$.

Aufgabe 2 (2+3+4+2 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass Sie die Menge der $\mathbb{Q}$ -rationalen Punkte des Einheitskreises $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ wie folgt bzgl. des Punktes $(-1, 0)$ parametrisieren können:

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1 \mapsto X, \quad t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right).$$

- (b) Zeigen Sie, dass

$$\phi : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2 \rightarrow C = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \mid x^2 + y^2 = z^2\}, \quad [u : v] \mapsto [u^2 - v^2 : 2uv : u^2 + v^2]$$

eine wohldefinierte Abbildung ist.

- (c) Zeigen Sie, dass ϕ bijektiv ist indem Sie eine Umkehrabbildung angeben.

Hinweis: Benutzen Sie die geometrische Interpretation der Abbildung aus (a).

- (d) Finden Sie auch eine Bijektion

$$\phi : \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1 \rightarrow C = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^2 \mid x^2 - y^2 = 2z^2\}.$$

Hinweis: Wir erinnern daran, dass nach Blatt 2, Aufgabe 2 (d)

$$X(\mathbb{Q}) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x = \frac{3t^2 - 2t + 3}{2(t^2 - 1)}, y = \frac{-t^2 + 6t - 1}{2(t^2 - 1)}, t \in \mathbb{Q} \setminus \{\pm 1\} \right\} \cup \left\{ \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Sie müssen nicht explizit eine Umkehrabbildung angeben um zu zeigen, dass ihre Abbildung eine Bijektion ist!