Diophantische Gleichungen: Probeklausur

Stefan Wewers
Michael Eskin

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
Höchstpunktzahl: 100.
Anmerkung: 100% entsprechen **80 Punkten**. Zum **Bestehen** reichen **40 Punkte**.

Zugelassene Hilfsmittel: Keine

Aufgabe 1 *(10+10 Punkte)*

(a) Seien $p = 5, x = 2/9 \in \mathbb{Q}$ und $S = \{0, 1, \ldots, 4\}$ ein fixes Repräsentantensystem von $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Sei $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 5^i \in \mathbb{Z}_5$ die eindeutige p-adische Darstellung. Bestimmen Sie die a_i für $i = 0, \ldots, 4$.

(b) Sei nun $x = 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^4 + 3 \cdot 5^5 + 1 \cdot 5^6 \ldots \in \mathbb{Z}_5$, genauer:

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} a_k 5^k, \qquad a_k = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } k \equiv 0 \bmod 3 \\ 2 & , \text{ falls } k \equiv 1 \bmod 3 \\ 3 & , \text{ falls } k \equiv 2 \bmod 3. \end{cases}$$

Stellen Sie x als rationale Zahl dar.

Aufgabe 2 *(10+10 Punkte)*
Sei $f = 5X^3 - X^2 + 5X - 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen von f bis einschließlich des Terms $a_2 p^2$ in

(a) $\mathbb{Z}_3$

(b) $\mathbb{Z}_5$.

Hilfestellung:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	-1	8	45	140	323	624	1073	1700	2535	3608	4949

Aufgabe 3 *(5+15 Punkte)*
Gegeben sei die folgende Quadrik

$$Q : 4X^2 + 5Y^2 + 16X - 10Y + 20 = 0$$

definiert über $\mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie den Typ von Q (entartet, Ellipse, Parabel, Hyperbel).

(b) Bestimmen Sie ob es einen rationalen Punkt gibt und falls ja, so bestimmen Sie sämtliche rationalen Punkte.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 *(10+10 Punkte)*
Bestimmen Sie alle p sodass die folgenden diophantischen Gleichungen Lösungen in $\mathbb{Q}_p$ besitzen. Besitzen diese auch nichttriviale Lösungen in $\mathbb{Q}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $4X^2 + 5Y^2 = 2Z^2$.

(b) $(X^2 - 2Y^2)(X^2 - 3Y^2)(X^2 - 2 \cdot 3Y^2) = 0$.

Aufgabe 5 *(7+7+6 Punkte)*
Gegeben sei die elliptische Kurve

$$E : Y^2 = X^3 + X^2 + 4X + 4.$$

(a) Seien $P = (-1, 0), Q = (4, 10)$. Berechnen Sie $P + Q$.

(b) Bestimmen Sie alle Punkte endlicher Ordnung.

(c) Gibt es Punkte der Ordnung 3? Falls ja, bestimmen Sie diese. Falls nein begründen Sie dies.