

Elemente der Algebra: Blatt 7

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 01.12.2014, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sind zu zweit abzugeben. Einzelabgaben sind nur im Ausnahmefall gestattet!

Aufgabe 1 (2+2+1 Punkte)

Sei \mathbb{W} die Würfelgruppe (siehe Bemerkung 1.4.7 im Skript). Wir definieren die folgenden zwei Gruppenhomomorphismen (sie müssen nicht zeigen, dass dies Gruppenhomomorphismen sind):

- Sei $X = \{1, \dots, 6\}$ die Menge der Seitenflächen des Würfels (wie üblich nummeriert, d.h. die Summe zweier gegenüberliegender Seiten ergibt immer 7). Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus

$$\rho : \mathbb{W} \rightarrow S(X) \simeq S_6, \quad g \mapsto \text{Permutation der Seitenflächen.}$$

- Sei $X = \{D_1, D_2, D_3\}$ wobei D_i die Gerade ist, die durch die Mitte der Seitenfläche i und der gegenüberliegenden Seitenfläche $7-i$ geht. Sei

$$\tau : \mathbb{W} \rightarrow S(X) \simeq S_3, \quad g \mapsto \text{Permutation der Geraden}$$

- (a) Bestimmen Sie das Bild der 3 Drehungen r, s, t aus Abbildung 1 unter ρ und τ .

Anmerkung: Für eine effektive Korrektur halten Sie sich bitte an die Bezeichnungen der Abbildung 1!

- (b) Bestimmen Sie Kern und Bild von ρ und τ .

- (c) Finden Sie eine bekannte Gruppe aus der Vorlesung sodass diese Gruppe isomorph ist zu $\mathbb{W}/\ker(\tau)$.

Aufgabe 2 (1+2+2 Punkte)

Sei G eine Gruppe.

- (a) Zeigen Sie, dass $Z(G) \triangleleft G$ ein Normalteiler ist.

Hinweis: Die Gruppe $Z(G)$ wurde in Blatt 1 Aufgabe 3 definiert.

- (b) Wir definieren für ein $h \in G$

$$\varphi_h : G \rightarrow G, \quad g \mapsto hgh^{-1}.$$

Wir definieren weiter

$$\text{Inn}(G) := \{\varphi : G \rightarrow G \text{ Isomorphismus} \mid \exists h \in G \text{ mit } \varphi = \varphi_h\}.$$

Zeigen Sie, dass $\text{Inn}(G)$ mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe ist.

Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 3 (b) von Blatt 3.

- (c) Zeigen Sie, dass $G/Z(G) \simeq \text{Inn}(G)$.

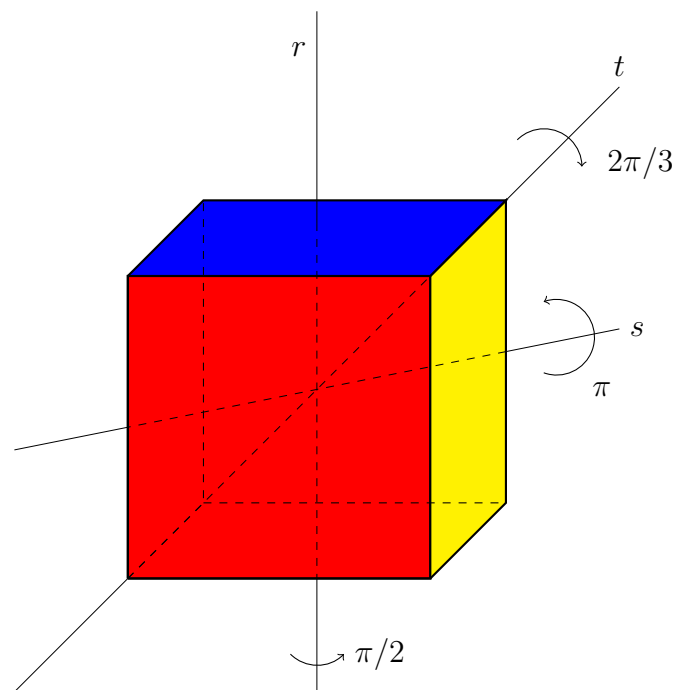


Abbildung 1: Die Drehungen r, s, t und Farbmarkierung. Farbe Blau (“oben”) entspricht der 1, Rot (“Frontseite”) entspricht der 2, und Gelb (“rechts”) entspricht 3.