

# Elemente der Algebra: Blatt 7

Irene Bouw  
Michael Eskin

Abgabe: 01.12.2014, vor der Übung

**Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter:** Die Übungsaufgaben sind zu zweit abzugeben. Einzelabgaben sind nur im Ausnahmefall gestattet!

## Aufgabe 1 (2+2+1 Punkte)

Sei  $\mathbb{W}$  die Würfelgruppe (siehe Bemerkung 1.4.7 im Skript). Wir definieren die folgenden zwei Gruppenhomomorphismen (sie müssen nicht zeigen, dass dies Gruppenhomomorphismen sind):

- Sei  $X = \{1, \dots, 6\}$  die Menge der Seitenflächen des Würfels (wie üblich nummeriert, d.h. die Summe zweier gegenüberliegender Seiten ergibt immer 7). Wir betrachten den Gruppenhomomorphismus

$$\rho : \mathbb{W} \rightarrow S(X) \simeq S_6, \quad g \mapsto \text{Permutation der Seitenflächen.}$$

- Sei  $X = \{D_1, D_2, D_3\}$  wobei  $D_i$  die Gerade ist, die durch die Mitte der Seitenfläche  $i$  und der gegebenüberliegenden Seitenfläche  $7 - i$  geht. Sei

$$\tau : \mathbb{W} \rightarrow S(X) \simeq S_3, \quad g \mapsto \text{Permutation der Geraden}$$

(a) Bestimmen Sie das Bild der 3 Drehungen  $r, s, t$  aus Abbildung 1 unter  $\rho$  und  $\tau$ .

**Anmerkung:** Für eine effektive Korrektur halten Sie sich bitte an die Bezeichnungen der Abbildung 1!

(b) Bestimmen Sie Kern und Bild von  $\rho$  und  $\tau$ .

(c) Finden Sie eine bekannte Gruppe aus der Vorlesung sodass diese Gruppe isomorph ist zu  $\mathbb{W}/\ker(\tau)$ .

## Aufgabe 2 (1+2+2 Punkte)

Sei  $G$  eine Gruppe.

(a) Zeigen Sie, dass  $Z(G) \triangleleft G$  ein Normalteiler ist.

**Hinweis:** Die Gruppe  $Z(G)$  wurde in Blatt 1 Aufgabe 3 definiert.

(b) Wir definieren für ein  $h \in G$

$$\varphi_h : G \rightarrow G, \quad g \mapsto hgh^{-1}.$$

Wir definieren weiter

$$\text{Inn}(G) := \{\varphi : G \rightarrow G \text{ Isomorphismus} \mid \exists h \in G \text{ mit } \varphi = \varphi_h\}.$$

Zeigen Sie, dass  $\text{Inn}(G)$  mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe ist.

**Hinweis:** Benutzen Sie Aufgabe 3 (b) von Blatt 3.

(c) Zeigen Sie, dass  $G/Z(G) \simeq \text{Inn}(G)$ .

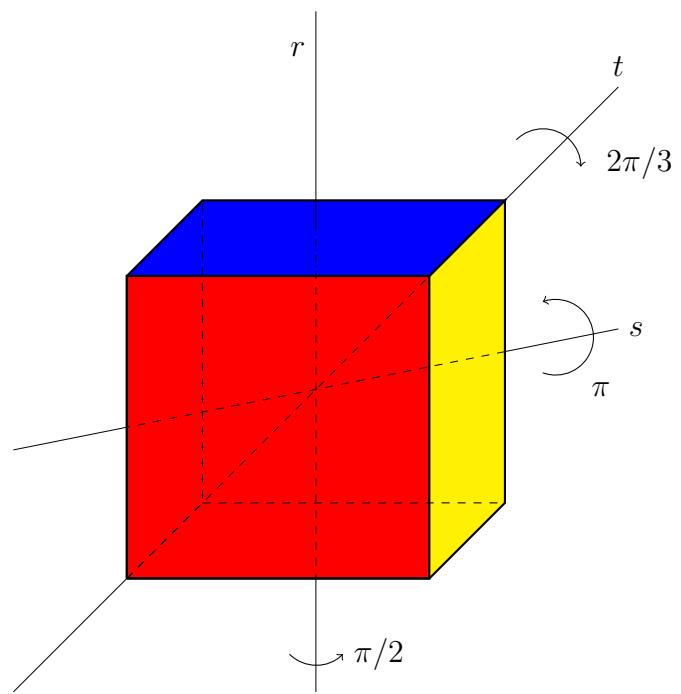


Abbildung 1: Die Drehungen  $r, s, t$  und Farbmarkierung. Farbe Blau (“oben”) entspricht der 1, Rot (“Frontseite”) entspricht der 2, und Gelb (“rechts”) entspricht 3.