Elemente der Algebra: Blatt 8

Irene Bouw
Michael Eskin

Abgabe: 08.12.2014, vor der Übung

Hinweis zur Abgabe der Übungsblätter: Die Übungsaufgaben sind zu zweit abzugeben. Einzelabgaben sind nur im Ausnahmefall gestattet!

Aufgabe 1 *(2+2 Punkte)*
Bestimmen Sie die Kardinalität der Symmetriegruppe der folgenden zwei Fußbälle mit Hilfe von Korollar 2.1.10. Geben Sie sorgfältig an welche Gruppenwirkung Sie benutzen!

Abbildung 1: “Telstar”

Abbildung 2: “Teamgeist”

Hinweis: Beachten Sie, dass der Telstar aus 12 regelmäßigen Fünfecken und 20 Sechsecken besteht.

Quellen der Abbildungen:

- http://de.wikipedia.org/wiki/Fußball_(Sportgerät)#mediaviewer/File:Trunc-icosa.jpg
- http://de.wikipedia.org/wiki/%2BTeamgeist#mediaviewer/File:TG_ITA-FRA.jpg

Aufgabe 2 *(1+2+1 Punkte)*
Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe mit p Elementen. Wir betrachten die Gruppenwirkung von G auf sich selbst durch Konjugation.

(a) Zeigen Sie, dass das Zentrum $Z(G)$ aus genau den Elementen $g \in G$ besteht, dessen Konjugationsklasse $C_G(g)$ nur ein Element enthält.

Hinweis: Die Gruppe $Z(G)$ hatten wir in Blatt 1 Aufgabe 3 definiert.

(b) Benutzen Sie Lemma 2.1.6 (a) um zu zeigen, dass alle Konjugationsklassen genau ein Element enthalten.

(c) Schließen Sie, dass G abelsch ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 *(1+1 Punkte)*
Sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\varphi} \mid \varphi \in [0, 2\pi)\}$. Dies ist eine Gruppe bezüglich Multiplikation komplexer Zahlen. Die Gruppe

$$T := S^1 \times S^1$$

heißt *Torus*.

Beschreiben Sie die Bahnen (z.B. mittels Skizze und Erklärung) der folgenden Gruppenwirkungen von $\mathbb{R}$ auf T. Hierbei sei die Bezeichnung an Abbildung 3 angelehnt.

(a) $\rho_1 : \mathbb{R} \times T \to T, \quad (t, (e^{ix}, e^{iy})) \mapsto \left(e^{i(x+t)}, e^{iy}\right)$

(b) $\rho_2 : \mathbb{R} \times T \to T, \quad (t, (e^{ix}, e^{iy})) \mapsto \left(e^{i(x+t)}, e^{i(y+t)}\right)$.

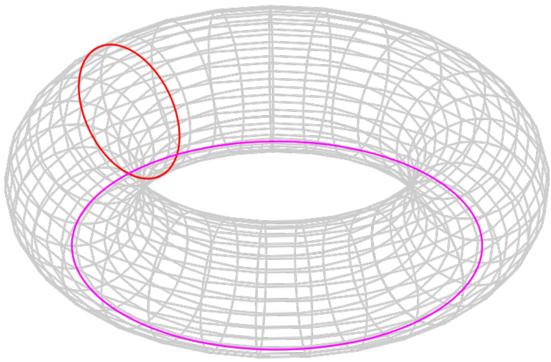

Abbildung 3: Torus. Der pinke Kreis stellt x-Komponente und der rote Kreis die y-Komponente dar.

Quelle der Abbildung : http://en.wikipedia.org/wiki/Torus#mediaviewer/File:Torus_cycles.svg