Elemente der Algebra: Klausur

Aufgabe 1 *(3+2 Punkte)*

(a) Finden Sie ein $\sigma \in S_8$ der Ordnung 15.

(b) Ist das von Ihnen gefundene Element σ auch in A_8?

Aufgabe 2 *(5 Punkte)*
Sei G eine abelsche Gruppe und sei $H \subset G$ die Menge der Elemente endlicher Ordnung. Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe ist.

Aufgabe 3 *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie die Anzahl der echt verschiedenen Möglichkeiten die Kanten eines regelmäßigen Tetraeders mit 3 Farben anzumalen. (Es reicht den Ausdruck anzugeben.)

Aufgabe 4 *(2+3+5 Punkte)*
Sei

$$H := \langle (2,1) \rangle < G := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}.$$

(a) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von G ist.

(b) Bestimmen Sie den Index $[G : H]$.

(c) Zeigen Sie, dass G/H zyklisch ist, indem Sie explizit einen Erzeuger angeben. (Begründen Sie Ihre Behauptung.)

Aufgabe 5 *(5 Punkte)*
Zeigen Sie, dass

$$I := (x^4 + x^2 - 2, x^3 - 3x^2 + 2x - 6) < \mathbb{Q}[x],$$

ein Hauptideal ist, indem Sie explizit einen Erzeuger d bestimmen.

Aufgabe 6 *(5 Punkte)*
Der Ring $\mathbb{F}_{25} := \mathbb{F}_5[x]/(x^2 + 2)$ ist ein Körper mit 25 Elemente. (Das brauchen Sie nicht zu zeigen.) Sei $\alpha \in \mathbb{F}_{25}$ eine Nullstelle von $x^2 + 2$. Bestimmen Sie die Ordnung von $\alpha \in \mathbb{F}_{25}^*$.

Bitte wenden!

Aufgabe 7 *(5 Punkte)*
Die Menge

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \right\} \subset M_2(\mathbb{Z})$$

ist ein kommutativer Ring. (Dies brauchen Sie nicht zu zeigen.) Finden Sie ein Ringisomorphismus

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \left\{ a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\} \to R.$$

(Begründen Sie Ihre Behauptung.)

Aufgabe 8 *(5+5 Punkte)*
Überprüfen Sie welche der folgenden Polynome im angegebenen Ring irreduzibel sind:

(a) $x^4 + x^3 + 1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[x]$.

(b) $x^4 + 3x^3 + 2x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.